Uvod u teleparalelizam i teleparalelna reprezentacija Weylove jednačine

Vedad Pašić

February 28, 2008

Osnovni pojmovi GR

- Zlatni standard za teoriju gravitacije - no nema kvantne gravitacije.

Osnovni pojmovi GR

- Zlatni standard za teoriju gravitacije - no nema kvantne gravitacije.
- Prostor i vrijeme nerazdvojivi - *prostorvrijeme*

Osnovni pojmovi GR

- Zlatni standard za teoriju gravitacije - no nema kvantne gravitacije.
- Prostor i vrijeme nerazdvojivi - *prostorvrijeme*
- Matematički opis pomoću diferencijalne geometrije

Osnovni pojmovi GR

- Zlatni standard za teoriju gravitacije - no nema kvantne gravitacije.
- Prostor i vrijeme nerazdvojivi - *prostorvrijeme*
- Matematički opis pomoću diferencijalne geometrije
- Dvije osnovne veličine - krivina i torzija :

$$R \neq 0, \qquad T = 0.$$

Osnovni pojmovi GR

- Zlatni standard za teoriju gravitacije - no nema kvantne gravitacije.
- Prostor i vrijeme nerazdvojivi - *prostorvrijeme*
- Matematički opis pomoću diferencijalne geometrije
- Dvije osnovne veličine - krivina i torzija :

$$R \neq 0, \qquad T = 0.$$

- Kompatibilna sa obzervacijama - vjeruje se da zahtjeva kvantne korekcije

Osnovni pojmovi GR

- Zlatni standard za teoriju gravitacije - no nema kvantne gravitacije.
- Prostor i vrijeme nerazdvojivi - *prostorvrijeme*
- Matematički opis pomoću diferencijalne geometrije
- Dvije osnovne veličine - krivina i torzija :

$$R \neq 0, \qquad T = 0.$$

- Kompatibilna sa obzervacijama - vjeruje se da zahtjeva kvantne korekcije
- Pioneerova anomalija

Metrički afina gravitacija

- Veći stepen slobode:

$$R \neq 0, \qquad T \neq 0.$$

Metrički afina gravitacija

- Veći stepen slobode:

$$R \neq 0, \qquad T \neq 0.$$

- Predložio Einstein, razvio E.J. Cartan, Higgs, Levi-Civita, Schrodinger, H. Weyl, itd.

Metrički afina gravitacija

- Veći stepen slobode:

$$R \neq 0, \qquad T \neq 0.$$

- Predložio Einstein, razvio E.J. Cartan, Higgs, Levi-Civita, Schrodinger, H. Weyl, itd.
- Nada za ujedinjenu teoriju polja.

Metrički afina gravitacija

- Veći stepen slobode:

$$R \neq 0, \qquad T \neq 0.$$

- Predložio Einstein, razvio E.J. Cartan, Higgs, Levi-Civita, Schrodinger, H. Weyl, itd.
- Nada za ujedinjenu teoriju polja.
- Našao rješenje koje se može interpretirati kao elementarna čestica (neutrino?).

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.
- Geometrija sa pseudo-Riemannianskom metrikom potpisa $(3,1)$, nestajućom krivinom i ne-nestajućom torzijom:

$$R = 0, \qquad T \neq 0,$$

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.
- Geometrija sa pseudo-Riemannianskom metrikom potpisa $(3,1)$, nestajućom krivinom i ne-nestajućom torzijom:

$$R = 0, \qquad T \neq 0,$$

- Koriste se tetrade (ortogonalna baza), umjesto metrike, kao osnovne promjenljive.

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.
- Geometrija sa pseudo-Riemannianskom metrikom potpisa $(3, 1)$, nestajućom krivinom i ne-nestajućom torzijom:

$$R = 0, \qquad T \neq 0,$$

- Koriste se tetrade (ortogonalna baza), umjesto metrike, kao osnovne promjenljive.
- SUPROTNO od GR

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.
- Geometrija sa pseudo-Riemannianskom metrikom potpisa $(3,1)$, nestajućom krivinom i ne-nestajućom torzijom:

$$R = 0, \qquad T \neq 0,$$

- Koriste se tetrade (ortogonalna baza), umjesto metrike, kao osnovne promjenljive.
- SUPROTNO od GR
- Jednostavniji matematički opis neutrina i moguće elektrona.

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.
- Geometrija sa pseudo-Riemannianskom metrikom potpisa $(3,1)$, nestajućom krivinom i ne-nestajućom torzijom:

$$R = 0, \qquad T \neq 0,$$

- Koriste se tetrade (ortogonalna baza), umjesto metrike, kao osnovne promjenljive.
- SUPROTNO od GR
- Jednostavniji matematički opis neutrina i moguće elektrona.
- Nadamo se da se može ponovo napisati cijela kvantna elektrodinamika u teleparalelnoj formi. (D. Vassiliev, Phys. Rev. D75, 025006 (2007).)

Teleparalelizam

- Pokušaj Einsteina da ujedini elektromagnetizam i gravitaciju.
- Geometrija sa pseudo-Riemannianskom metrikom potpisa $(3,1)$, nestajućom krivinom i ne-nestajućom torzijom:

$$R = 0, \qquad T \neq 0,$$

- Koriste se tetrade (ortogonalna baza), umjesto metrike, kao osnovne promjenljive.
- SUPROTNO od GR
- Jednostavniji matematički opis neutrina i moguće elektrona.
- Nadamo se da se može ponovo napisati cijela kvantna elektrodinamika u teleparalelnoj formi. (D. Vassiliev, Phys. Rev. D75, 025006 (2007).)
- Većina tretira teleparalelizam čisto kao teoriju gravitacije bez pokušaja ujedinjenja sa elektromagnetizmom.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Descartesove koordinate x^α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Descartesove koordinate x^α, $\alpha = 1, 2, 3$.
- Euclidska metrika $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Descartesove koordinate x^α, $\alpha = 1, 2, 3$.
- Euclidska metrika $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Euklidska udaljenost na kvadrat $= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Descartesove koordinate x^α, $\alpha = 1, 2, 3$.
- Euclidska metrika $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Euklidska udaljenost na kvadrat $= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.
- Dužina segmenta krive koja je parametrizirana sa t,

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} dt,$$

gdje su $(x_1(t), ..., x_n(t))$ jednačine koje opisuju ovu krivu u lokalnom koordinatnom sistemu.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Descartesove koordinate x^α, $\alpha = 1, 2, 3$.
- Euclidska metrika $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Euklidska udaljenost na kvadrat $= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.
- Dužina segmenta krive koja je parametrizirana sa t,

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} dt,$$

  gdje su $(x_1(t), ..., x_n(t))$ jednačine koje opisuju ovu krivu u lokalnom koordinatnom sistemu.
- U Euclidskom slučaju to postaje uobičajeno

$$L = \int_a^b \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}$$

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Ko-okvir $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$: triada kovektorskih polja koja zadovoljava metrički uslov

$$g = \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3 .$$

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Ko-okvir $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$: triada kovektorskih polja koja zadovoljava metrički uslov

$$g = \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$

- **NB.** Ko-okvir živi odvojeno od Descatesovih koordinata (nije u skladu sa koordinatnim linijama).

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Ko-okvir $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$: triada kovektorskih polja koja zadovoljava metrički uslov

$$g = \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$

- **NB.** Ko-okvir živi odvojeno od Descatesovih koordinata (nije u skladu sa koordinatnim linijama).
- Pojam paralelizma: svako kovektorsko polje ϑ^k $k = 1, 2, 3$, je paralelno po definiciji.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Ko-okvir $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$: triada kovektorskih polja koja zadovoljava metrički uslov

$$g = \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$

- **NB.** Ko-okvir živi odvojeno od Descatesovih koordinata (nije u skladu sa koordinatnim linijama).
- Pojam paralelizma: svako kovektorsko polje ϑ^k $k = 1, 2, 3$, je paralelno po definiciji.
- Paralelizam $\Rightarrow$ konekcija.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Ko-okvir $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$: triada kovektorskih polja koja zadovoljava metrički uslov

$$g = \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$

- **NB.** Ko-okvir živi odvojeno od Descatesovih koordinata (nije u skladu sa koordinatnim linijama).
- Pojam paralelizma: svako kovektorsko polje ϑ^k $k = 1, 2, 3$, je paralelno po definiciji.
- Paralelizam $\Rightarrow$ konekcija.
- Krivina $=0$.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Ko-okvir $\{\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$: triada kovektorskih polja koja zadovoljava metrički uslov

$$g = \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$

- **NB.** Ko-okvir živi odvojeno od Descatesovih koordinata (nije u skladu sa koordinatnim linijama).
- Pojam paralelizma: svako kovektorsko polje ϑ^k $k = 1, 2, 3$, je paralelno po definiciji.
- Paralelizam $\Rightarrow$ konekcija.
- Krivina $=0$.
- Terminologija: Ako je $R = 0$, prostorvrijeme se zove ravnim ili teleparalelnim ili Weitzenbok.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Jačina polja: torzija

$$T = \vartheta^1 \otimes d\vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes d\vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes d\vartheta^3.$$

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Jačina polja: torzija

$$T = \vartheta^1 \otimes d\vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes d\vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes d\vartheta^3.$$

- Iredubicilni dio jačine polja: aksijalna (totalno antisimetrična) torzija

$$T_{axial} = \frac{1}{3}\left(\vartheta^1 \wedge d\vartheta^1 + \vartheta^2 \wedge d\vartheta^2 + \vartheta^3 \wedge d\vartheta^3\right).$$

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Jačina polja: torzija

$$T = \vartheta^1 \otimes d\vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes d\vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes d\vartheta^3.$$

- Iredučibilni dio jačine polja: aksijalna (totalno antisimetrična) torzija

$$T_{axial} = \frac{1}{3}\left(\vartheta^1 \wedge d\vartheta^1 + \vartheta^2 \wedge d\vartheta^2 + \vartheta^3 \wedge d\vartheta^3\right).$$

- Mogući Lagranžijani:

$$L = T_{axial} \tag{1}$$

$$L = ||T_{axial}||^2 * 1 \tag{2}$$

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Akcija (varijacionalni funkcional) $\int L$.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Akcija (varijacionalni funkcional) $\int L$.
- Variramo akciju u odnosu na ko-okvir pod metričkim uslovom kako bismo dobili Euler-Lagrangeovu jednačinu, nelinearnu PDJ za nepoznati ko-okvir.

Teleparalelizam u Euclidskom 3-prostoru

- Akcija (varijacionalni funkcional) $\int L$.
- Variramo akciju u odnosu na ko-okvir pod metričkim uslovom kako bismo dobili Euler-Lagrangeovu jednačinu, nelinearnu PDJ za nepoznati ko-okvir.
- Lagranžijan (1) daje jednačinu prvog reda, Lagranžijan (2) daje jednačinu drugog reda.

Diracova jednačina

- Diracova jednačina je sistem 4 homogene linearne PDJ za 4 kompleksne nepoznate u dimenziji $1 + 3$.

Diracova jednačina

- Diracova jednačina je sistem 4 homogene linearne PDJ za 4 kompleksne nepoznate u dimenziji $1 + 3$.
- Formulisanje Diracove jednačine zahtjeva:
  1. spinore,
  2. Paulijeve matrice,
  3. kovarijantni izvod.

Diracova jednačina

- Diracova jednačina je sistem 4 homogene linearne PDJ za 4 kompleksne nepoznate u dimenziji $1 + 3$.
- Formulisanje Diracove jednačine zahtjeva:
  1. spinore,
  2. Paulijeve matrice,
  3. kovarijantni izvod.
- Teleparalelna reformulacija Diracove jednačine zahtjeva:
  1. diferencijalne forme,
  2. $\wedge$- proizvod,
  3. vanjski izvod.

Weylova jednačina - Dirac bez mase

- Dimenzija je sad $1 + 3$.

Weylova jednačina - Dirac bez mase

- Dimenzija je sad $1 + 3$.
- Kookvir je $\{\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$.

Weylova jednačina - Dirac bez mase

- Dimenzija je sad $1+3$.
- Kookvir je $\{\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$.
- $$g = \vartheta^0 \otimes \vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$

Weylova jednačina - Dirac bez mase

- Dimenzija je sad $1+3$.
- Kookvir je $\{\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$.
- $$g = \vartheta^0 \otimes \vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$
- $$T = \vartheta^0 \otimes d\vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes d\vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes d\vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes d\vartheta^3.$$

Weylova jednačina - Dirac bez mase

- Dimenzija je sad $1 + 3$.
- Kookvir je $\{\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3\}$.
- $$g = \vartheta^0 \otimes \vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes \vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes \vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes \vartheta^3.$$
- $$T = \vartheta^0 \otimes d\vartheta^0 + \vartheta^1 \otimes d\vartheta^1 + \vartheta^2 \otimes d\vartheta^2 + \vartheta^3 \otimes d\vartheta^3.$$
- $$T_{axial} = \frac{1}{3}\left(\vartheta^0 \wedge d\vartheta^0 + \vartheta^1 \wedge d\vartheta^1 + \vartheta^2 \wedge d\vartheta^2 + \vartheta^3 \wedge d\vartheta^3\right).$$

Teleparalelna Weylova jednačina

- Stavimo da je $l = \vartheta^0 + \vartheta^3$ i definišimo Lagranžijan

$$\boxed{L = l \wedge T_{axial}}$$

Teleparalelna Weylova jednačina

- Stavimo da je $l = \vartheta^0 + \vartheta^3$ i definišimo Lagranžijan

$$\boxed{L = l \wedge T_{axial}}$$

- Theorem

  Odgovarajuća Euler-Lagrangeova jednačina je, do promjene promjenljive, Weylova jednačina.

Porijeklo Lagranžijana $L = I \wedge T_{axial}$

- Posmatrajmo Lagranžijan

$$L = ||T_{axial}||^2 * 1$$

što je poseban slučaj Cossertovog elasticiteta.

Porijeklo Lagranžijana $L = l \wedge T_{axial}$

- Posmatrajmo Lagranžijan

$$L = ||T_{axial}||^2 * 1$$

  što je poseban slučaj Cossertovog elasticiteta.
- Formalna petrubacija: linearizacija Lagranžijana $L = ||T_{axial}||^2 * 1$ oko ravnog talasa (koji proiilazi iz slučaja Minkowskog), daje Lagranžijan

$$L = l \wedge T_{axial}.$$