1. Nizovi - definicija i osnovni pojmovi

Definicija i osnovni pojmovi

Definicija 1..1. Svako preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, nazivamo realnim nizom. Broj koji se ovim preslikavanjem dodjeljuje prirodnom broju n označavamo sa $a(n)$, ili češće sa a_n (x_n, f_n) i nazivamo ga n-ti član niza. Pri tome broj n u oznaci a_n nazivamo indeksom člana niza. Ako je specificirana zavisnost a_n od n, onda se a_n naziva opštim članom niza. Za niz čiji su članovi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ koristit ćemo kraću oznaku $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ili kratkoće radi samo (a_n).

Na isti način možemo definisati nizove kompleksnih brojeva, nizove funkcija ili uopšteno nizove elemenata proizvoljnog skupa. Mi ćemo se ograničiti na posmatranje samo realnih numeričkih nizova.

Primjer. Niz

$$1, 2, 3, ..., n, n+1, ...$$

je niz prirodnih brojeva. Niz

$$1, 3, 5, ..., 2n+1, ...$$

je niz neparnih prirodnih brojeva, a

$$1, 4, 9, 16, 25, ...$$

je niz kvadrata prirodnih brojeva.

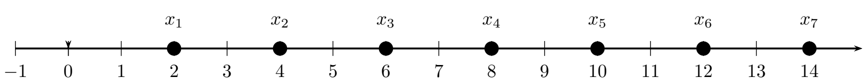
Niz je potpuno odredjen svojim opštim članom. Na primjer, ako je opšti član niza dat sa $x_n = \frac{n}{n+1}$, niz je u potpunosti odredjen i njegovi članovi su $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ..., ili ako želimo odrediti stoti član ovog niza, $x_{100} = \frac{100}{101}$.
Za odredjivanje niza nije neophodno da postoji formula kojom se eksplicitno odredjuje opšti član x_n u zavisnosti od n. Npr., ako je x_n n-ti po redu prost broj, niz (x_n) je korektno definisan, iako ne znamo formulu za odredjivanje n-tog člana tog niza. Isto tako možemo govoriti da je niz (a_n) zadat tako da je a_n n-ta cifra u decimalnom razvoju broja $\sqrt{2}$, mada formulu za n-tu cifru tog razvoja ne znamo eksplicitno. Znati konačno mnogo prvih članova niza nije dovoljno za jednoznačno odredjivanje niza. Npr., ako je dato prvih pet članova niza

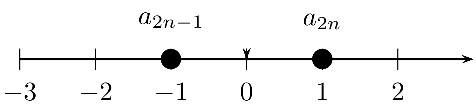
$$0, 7, 26, 63, 124,$$

pravilo po kome su konstruisani ovi članovi može ali i ne mora da važi za šesti, sedmi i dalje članove ovog niza.

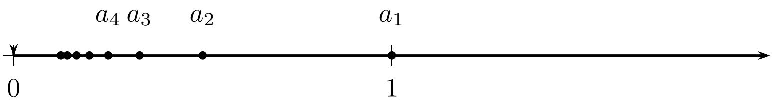
Predstavljanje nizova

Predstavljati nizove možemo na dva načina. Iz samog opisa niza kao liste brojeva dobijamo prvi način, predstavljajući članove niza na realnoj pravoj. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, naznačavajući tačkama članove niza, bio predstavljen





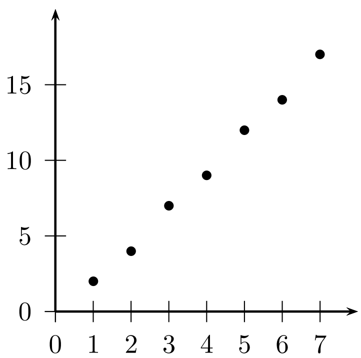
Predstavljati beskonačne nizove na ovaj način bio bi problem jer bi se često gubila predstava o nizu. Naprimjer za niz $(-1, 1, -1, 1, ...)$ slika bi predstavljala samo dvije tačke
a oznakama a_{2n} i a_{2n-1} bi sugerisali parne i neparne pozicije članova našeg niza. Još teže bi bilo predstaviti niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.



Označili bi prvih nekoliko članova niza, a dalje članove bi smo samo naznačili tačkama. Bolja, preglednija varijanta predstavljanja niza proizilazi iz činjenice da niz možemo shvatiti i kao preslikavanje. Pod preslikavanjem shvatamo činjenicu da članove niza numerišemo po njihovim pozicijama. Tako niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ možemo predstaviti tabelom

n	1	2	3	...	k	...
x_n	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...

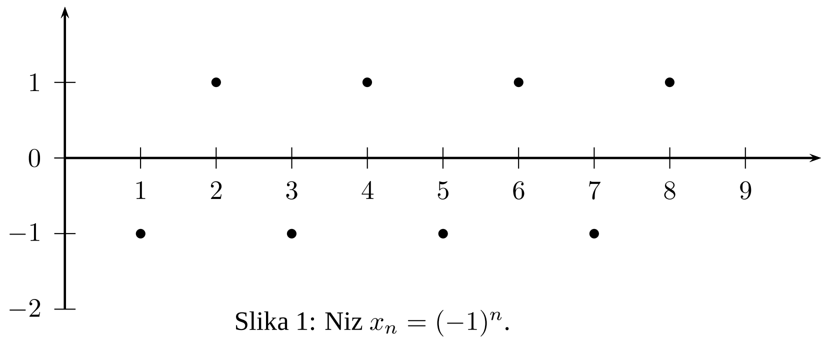
Ovo znači da niz možemo posmatrati kao preslikavanje $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Domen ovog preslikavanja je skup prirodnih brojeva i kad god je domen preslikavanja skup $\mathbb{N}$, takvo preslikavanje nazivamo niz.
Sve ovo znači da sada možemo koristiti sve osobine funkcija, ali takodje i pojmove uvedene sa njima. Ovo prije svega znači da niz možemo predstaviti u obliku grafa. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, predstavljen grafom izgledao kao na sljedećoj slici



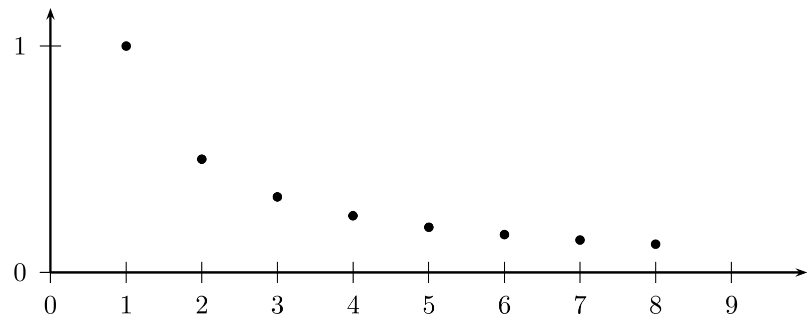
Ovo je sada puno pogodniji način za predstavljanje beskonačnih nizova. Sada grafički možemo predstaviti malopređašnje "problematične" nizove:

1.1. Konvergencija nizova

Konvergencija nizova
U matematičkoj analizi proučava se ponašanje članova niza kada njihov indeks neograničeno raste, tj. kada indeks "teži u beskonačnost".



Slika 1: Niz $x_n = (-1)^n$.



Slika 2: Niz $x_n = \frac{1}{n}$.

Ideja je da se proučava "gomilanje" članova niza oko neke konkretne vrijednosti. Tako na primjer, članovi nizova $(\frac{1}{n})$ i $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ "gomilaju se" oko nule, tj. sve su bliže nuli kako indeks n postaje veći, što vidimo ako izračunamo po nekoliko članova ovih nizova,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots .$$

Za članove niza čiji je opšti član dat sa $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ ne bismo mogli tvrditi da su sve bliže nuli kada se n povećava jer je na primjer

$$0 < x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} < \frac{3}{2n} = x_{2n} ,$$

iz čega vidimo da je x_{2n} na većoj udaljenosti od nule nego njemu prethodeći član. Medjutim, i ovde se može uočiti neko gomilanje oko nule, što se vidi ako se izračuna nekoliko prvih članova niza, $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Naime, ako izaberemo proizvoljno malen broj $\varepsilon > 0$, svi članovi niza će biti manji od ε, samo ako posmatramo dovoljno "daleke" članove u datom nizu. Zaista, nije teško vidjeti da za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n} \le \frac{3}{n} ,$$

pa je dovoljno posmatrati članove niza čiji je indeks $n > \frac{3}{\varepsilon}$, da bude zadovoljeno $x_n < \varepsilon$.

Primjetimo da smo u gornjem primjeru pokazali da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ svi članovi niza, počevši od nekog indeksa n_0, zadovoljavaju nejednakost $x_n < \varepsilon$, tj. oni se gomilaju oko tačke 0. Ovo je globalna ideja kojom se uvodi pojam konvergencije.

Definicija 1..2. Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza (x_n) ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0, takav da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$, što jednostavnije zapisujemo matematičkom simbolikom sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)\ . \tag{1}$$

Gornju činjenicu zapisujemo sa

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \text{ ili } \ x_n \to a \ (n \to +\infty)\ .$$

Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, kažemo da niz (x_n) konvergira ka a ili da teži ka a, kada n teži u beskonačnost. Ako postoji $a \in \mathbb{R}$, takav da $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, kažemo da je niz konvergentan.

Primjer. U primjeru ispred Definicije 1..2 smo pokazali da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0.$ Na sličan način se pokazuje da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ili $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Pokažimo prvu relaciju.

$$\boxed{\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}}$$

Postoji više ekvivalentnih oblika uslova 1. Tako možemo pisati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |x_n - a| < \varepsilon\ ,$$

gdje u dijelu "$(\forall n \geq n_0)$" podrazumijevamo da je $n \in \mathbb{N}$.
Takodjer, znak "$<$" u 1 možemo zamijeniti sa znakom "$\leq$", a znak "$\geq$" znakom "$>$".
Osim toga, umjesto "$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$" možemo pisati "$(\exists y_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq y_0)$".
Ovu posljednju zamjenu naročito dobro možemo koristiti da bi izbjegli korištenje funkcije "$[\cdot]$".

Primjer. Neka je $x_n = 2^{\frac{1}{n}}$. Posmatramo li nekoliko prvih članova ovog niza

$$x_1 = 2^1 = 2\ ,\ x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = 1,41...\ ,\ x_3 = 2^{\frac{1}{3}} = 1,26...\ ,$$

$$x_4 = 2^{\frac{1}{4}} = 1,19...\ ,\ ...\ , x_{10} = 2^{\frac{1}{10}} = 1,07...\ ,$$

vidimo da se vrijednosti umanjuju i da se "kreću" ka 1, tj. "osjećamo" da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Ali ovakvo razmišljanje ni u kom slučaju ne predstavlja dokaz ove tvrdnje.

Na isti način se pokazuje sljedeći važan limes

$$\boxed{\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \ ,\ \ (a > 0)}}$$

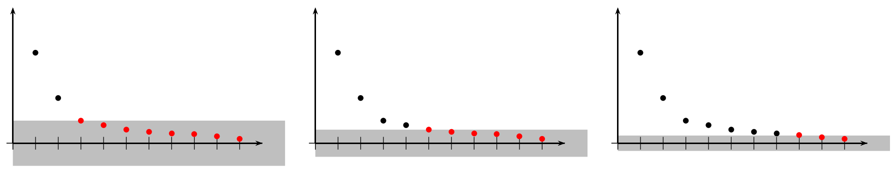
Okolina tačke

Definicija 1..3. Okolina tačke $a \in \mathbb{R}$ je proizvoljan otvoren interval koji sadrži tačku a. Otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbb{R}$, naziva se ε-okolina tačke a.

Definicija 1..4. Kažemo da skoro svi članovi niza imaju neku osobinu P ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svako $n \geq n_0$, x_n ima osobinu P.

Drugačije rečeno, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počev od nekog indeksa ili što je isto kao da kažemo da tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo. Nejednakost $|x_n - a| < \varepsilon$, koristeći poznati stav za apsolutnu vrijednost, možemo zapisati i kao $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, što je opet ekvivalentno sa tim da $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Koristeći sve rečeno, Definiciju 1..2 možemo iskazati ekvivalentno u sljedećem obliku.

Definicija 1..5. Kažemo da niz (x_n) konvergira ka tački $a \in \mathbb{R}$ ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.



Slika 3: Skoro svi članovi niza u raznim ε-okolinama

Ako se skoro svi članovi niza nalaze u nekoj ε_0-okolini tačke a, onda to isto važi i za svaku ε-okolinu, gdje je $\varepsilon > \varepsilon_0$.
Iz ovoga je jasno da je konvergenciju dovoljno pokazati za malo ε, odnosno za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, gdje je ε_0 proizvoljan pozitivan broj.

Primjer. Niz čiji je opšti član $x_n = (-1)^n$ nije konvergentan. Zaista, pretpostavimo suprotno, tj. da je za neko $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.
Kako su svi članovi datog niza jednaki ili 1 ili -1, to znači da se oba ta broja moraju nalaziti u proizvoljnoj ε-okolini tačke a. Medjutim, to očigledno nije moguće, npr. izaberemo li $\varepsilon < \frac{1}{2}$ tada nije moguće da oba broja i 1 i -1 budu u intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ čija je dužina manja od 1.

2. Konvergentni nizovi

2.1. Osobine konvergentnih nizova

Teorem 2..1. *Ako niz ima graničnu vrijednost onda je ona jedinstvena.*

Dokaz
Pretpostavimo da vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = b\,.$$

Ako je $a \neq b$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takvo da ε-okoline oko tačaka a i b budu disjunktne

(dovoljno je uzeti da je $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$).
Na osnovu Definicije 1..5 zaključujemo onda da su svi članovi niza (x_n), počev od nekog indeksa n_1, u ε-okolini broja a, ali isto tako bi morali svi članovi niza počev od nekog indeksa n_2 biti u ε-okolini tačke b.
Ako posmatramo članove niza čiji su indeksi veći i od n_1 i od n_2, zaključili bi smo da se oni nalaze i u jednoj i u drugoj ε-okolini, što nije u saglasnosti sa disjunktnošću tih okolina. □

Definicija 2..2. Za niz (x_n) kažemo da je ograničen odozgo ako vrijedi:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq M\ .$$

Niz je ograničen odozdo ako vrijedi:

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \geq m\ .$$

Definicija 2..3. Za niz (x_n) kažemo da je ograničen ako je skup svih elemenata tog niza ograničen, tj. ako postoji realan broj $M \geq 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo zapisujemo sa

$$(\exists M \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \leq M\ .$$

Teorem 2..4. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz
Neka je niz (x_n) konvergentan, tj. neka je $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, na primjer neka je $\varepsilon = 1$. Na osnovu definicije konvergencije, svi članovi niza, počev od nekog indeksa n_0, pripadaju okolini $(a-1, a+1)$, odnosno van ove okoline se nalazi konačno mnogo članova niza.
Neka je m_1 najmanja vrijednost i M_1 najveća vrijednost od tih konačno mnogo članova koji su van okoline. Označimo sa

$$m = \min\{a-1, m_1\}\ \ ,\ \ M = \max\{a+1, M_1\}\ .$$

Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ m \leq x_n \leq M\ ,$$

što predstavlja ograničenost niza. □

Ograničenost niza je prema Teoremi 2..4, potreban uslov konvergencije. Da to nije i dovoljan uslov, pokazuje primjer niza $((-1)^n)$ koji jeste ograničen, ali kao što je ranije pokazano nije konvergentan.
U sljedećim teoremama pokazat ćemo vezu limesa i osnovnih algebarskih operacija. U mnogim dokazima koji slijede koristit ćemo se poznatom osobinom nejednakosti trougla, naime ako znamo da je $|a-b| < \varepsilon$ i $|b-c| < \varepsilon$, tada imamo

$$|a-c| = |a-b+b-c| \leq |a-b| + |b-c| < 2\varepsilon\ .$$

Teorem 2..5. *Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n).*

1. *Ako je $x_n = c \in \mathbb{R}$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.*
2. *Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) i neka su a, b i c proizvoljni realni brojevi. Tada važi:*

(a) $\lim_{n\to+\infty}(ax_n + by_n) = ax + by$.

(b) $\lim_{n\to+\infty}(x_n + c) = x + c$.

(c) $\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

(d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$*, ako je* $y \neq 0$ *i* $y_n \neq 0$ *za* $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz

1. je posljedica činjenice da se broj c nalazi u svakoj svojoj okolini.

2. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Počevši od nekog indeksa n_1 svi članovi niza (x_n) su u ε-okolini tačke x. Isto tako, od nekog indeksa n_2 svi članovi niza (y_n) su u ε-okolini tačke y. Stavimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada su za svako $n \geq n_0$ ispunjene obje nejednakosti

$$|x_n - x| < \varepsilon \ \text{ i } \ |y_n - y| < \varepsilon \ ,$$

pa iz nejednakosti trougla slijedi za $n \geq n_0$

$$|ax_n + by_n - (ax + by)| = |ax_n - ax + by_n - by| \leq |a||x_n - x| + |b||y_n - y| \leq$$
$$\leq (|a| + |b|)\varepsilon \ .$$

Kako je $|a| + |b|$ fiksan realan broj, a ε proizvoljan malen broj, to je i $(|a| + |b|)\varepsilon$ proizvoljno malen broj pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}(ax_n + by_n) = ax + by \ .$$

Tvrdjenje (b) u 2. je direktna posljedica tvrdjenja 2.(a) i 1. uzimajući $y_n = c$ i stavljajući da je $a = b = 1$.

Dokažimo tvrdjenje (c). Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Primjenom nejednakosti trougla imamo

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy_n + xy_n - xy| \leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| \ . \tag{2}$$

Na osnovu Teorema 2..4, postoji realan broj $M \geq 0$, takav da je $|y_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada kao i u dokazu tvrdjenja (a), postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$, pa iz (2) imamo

$$|x_n y_n - xy| \leq (M + |x|)\varepsilon$$

pa je tvrdjenje dokazano.

Dokžimo i tvrdnju (d). Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, gdje je $y \neq 0$. Ponovo primjenom nejednakosti trougla imamo

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right| \leq \frac{|x_n y - xy| + |xy - y_n x|}{|y_n||y|}$$
$$= \frac{|y||x_n - x| + |x||y_n - y|}{|y_n||y|} \ . \tag{3}$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji n_0, takvo da je $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$ čim je $n \geq n_0$. Prema tome, brojilac posljednjeg razlomka je manji od $(|x| + |y|)\varepsilon$. Kako je $y \neq 0$, postoji neko $\delta > 0$ takvo da interval $(-\delta, \delta)$ nema zajedničkih tačaka sa intervalom $(y - \delta, y + \delta)$ (npr. uzeti $\delta = \frac{|y|}{2}$). U intervalu $(y - \delta, y + \delta)$ nalaze se svi članovi niza (y_n) počevši od nekog indeksa n_1, pa je $|y_n| \geq \delta$ za $n \geq n_1$, pa je imenilac u posljednjem razlomku u (3) veći od $\delta|y|$. Dakle, ako je $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ onda je

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| \leq \frac{|x| + |y|}{\delta|y|}\varepsilon\ ,$$

pri čemu δ ne zavisi od ε. Time je dokaz završen. □

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)$.
Koristeći pravilo $2.(a)$ i ranije pokazani limes niza ($\sqrt[n]{a}$) imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} + 2 \cdot 3^{\frac{1}{n}}\right) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5\ .$$

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + 6\right)$.
Koristeći pravilo $2.(b)$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} + 6\right) = 0 + 6 = 6\ .$$

Definicija 2..6. Niz (x_n) za koga važi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, nazivamo nula-niz.

Zapravo, ispitivanje proizvoljnog konvergentnog niza se može svesti na ispitivanje nula-niza, naime važi

Teorem 2..7. *Niz (x_n) konvergira ka $a \in \mathbb{R}$ ako i samo ako niz $(x_n - a)$ konvergira ka 0.*

Dokaz
Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Na osnovu Teorema 2..5 2.(b) je $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n - a = 0$.
Obratno, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - a) = 0$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(x_n - a + a) = \lim_{n\to+\infty}(x_n - a) + a = a\ .$$

□

Teorem 2..8. *Zbir, razlika i proizvod dva nula-niza je ponovo nula-niz.*

Teorem 2..9. *Neka je (x_n) proizvoljan nula-niz i neka je (y_n) proizvoljan ograničen niz (ne obavezno konvergentan). Tada je niz (z_n), gdje je $z_n = x_n \cdot y_n$ ($n \in \mathbb{N}$), nula-niz.*

Dokaz
Kako je niz (y_n) ograničen, to postoji realan broj $M > 0$ takav da je za svako $n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq M$. Iz konvergencije niza (x_n) ka nuli slijedi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$,

tako da je za sve $n \geq n_0$ zadovoljeno $|x_n| < \varepsilon$. Na osnovu svega ovoga zaključujemo da će za $n \geq n_0$ vrijediti

$$|z_n| = |x_n \cdot y_n| = |x_n||y_n| < M\varepsilon \ ,$$

a što znači da niz (z_n) konvergira ka nuli.

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n}$.
Označimo sa $z_n = \dfrac{\cos n}{n} = \dfrac{1}{n}\cos n$. Kako je niz $x_n = \frac{1}{n}$ nula-niz, a niz $y_n = \cos n$ je ograničen ($\cos x \leq 1$), to je na osnovu gornje teoreme niz (z_n) nula-niz, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \ .$$

Veza limesa i relacija poretka

Teorem 2..10. *Neka je (x_n) proizvoljan niz.*

1. *Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x > p$ ($< p$), tada je $x_n > p$ ($< p$) za skoro svako $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Ako je niz (x_n) konveregentan i ako je $x_n > p$ ($< p$), za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq p$ ($\leq p$).*

Dokaz

1. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $a > p$. Stavimo li da je $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$, svi brojevi koji pripadaju intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ su veći od p ali skoro svi članovi niza (x_n) su u toj ε-okolini i time je tvrdjenje dokazano. Slučaj kada je $a < p$ dokazuje se analogno.

2. Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $x_n > p$ za skoro svako n. Ako bi bilo $a < p$, to bi na osnovu dokazanog pod 1) značilo da je $x_n < p$ za skoro svako n, što je očigledna kontradikcija. Dakle mora biti $a \geq p$. $\square$

Prethodni teorem najčešće ćemo koristiti za slučaj $p = 0$. Naime, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ pozitivan (negativan) broj, tada su skoro svi članovi niza pozitivni (negativni). Ako su skoro svi članovi niza pozitivni (negativni), tada je granična vrijednost niza nenegativna (nepozitivna).

Primjer. Posmatrajmo niz $(\frac{1}{n})$. Svi članovi niza su pozitivni, tj. $\frac{1}{n} > 0$, ali $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Ovim se potvrdjuje slijedeće, ako je $x_n > p$ za skoro svako n onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq p$

Posljedica 2..11. *Ako svi članovi niza (x_n) pripadaju segmentu $[a, b]$, tada i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in [a, b]$.*

2.2. Beskonačne granične vrijednosti

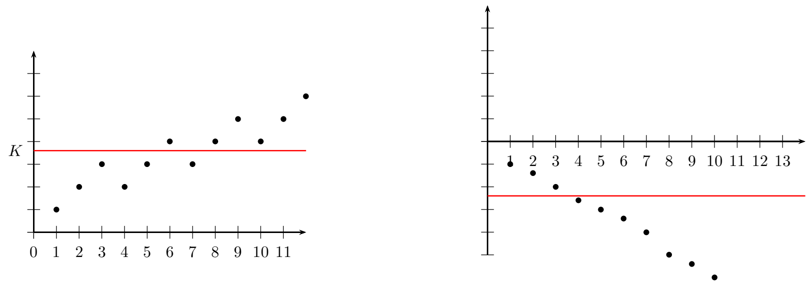
Definicija 2..12. Kažemo da niz (x_n) divergira ka plus beskonačnosti, što označavamo sa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ako vrijedi

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)x_n > K \ .$$

Kažemo da niz (x_n) divergira ka minus beskonačnosti, što označavamo sa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, ako vrijedi

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)x_n < -K \ .$$

U oba slučaja kažemo da niz određeno divergira.



Slika 4: Određeno divergentni nizovi.

Definicija 2..12 postaje analogna Definiciji 1..2 ako se uvede pojam okoline beskonačnosti. Pod okolinom od $+\infty$ podrazumijevamo proizvoljan interval $(K, +\infty)$ i analogno pod okolinom od $-\infty$ podrazumijevamo proizvoljan interval $(-\infty, -K)$ za neko $K \in \mathbb{R}^+$. Na osnovu ovoga možemo reći da niz odredjeno divergira ka $+\infty$ ako su skoro svi članovi niza u proizvoljnoj okolini od $+\infty$. Sada možemo izvršiti selekciju svih nizova u odnosu na konvergenciju. Svaki realni niz spada u jednu od klasa:

- Niz je konvergentan (granična vrijednost mu je neki realan broj).
- Niz je odredjeno divergentan (granična vrijednost mu je ili $+\infty$ ili $-\infty$).
- Niz je neodredjeno divergentan (nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrijednost).

Primjer. Posmatrajmo geometrijski niz $x_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Za koje $q \in \mathbb{R}$ je dati niz konvergentan?

Teorem 2..13. *Neka je* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *i neka je* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. *Tada vrijedi:*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = sgnx \cdot \infty$ *(*$x \neq 0$*).*
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

4. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* (x_n) *pozitivni, tada je* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Postoje kombinacije dva niza kada se rezultat ne može direktno odrediti kao u slučajevima opisanim u ovim teoremama. Tada kažemo da je granična vrijednost neodredjena ili da je neodredjenog tipa. To medjutim ne znači da granična vrijednost ne postoji, već samo da se ne može unaprijed odrediti primjenom pravila datih u ovim teoremama.

Primjer. Za niz sa opštim članom $x_n = \dfrac{n^2+3n-2}{2n^2+5n+4}$ imamo neodredjenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$

Postoji sedam tipova neodredjenosti i oni su:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 1^{\infty}\ ,\ \infty^0\ ,\ 0^0\ .}$$

2.3. Monotoni nizovi

Definicija 2..14. Za niz (x_n) kažemo da je

- strogo monotono rastući ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1} > x_n$.
- monotono rastući (neopadajući) ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1} \geq x_n$.
- strogo monotono opadajući ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1} < x_n$.
- monotono opadajući (nerastući) ako vrijedi $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_{n+1} \leq x_n$.

Za niz koji posjeduje bilo koju od navedenih osobina kažemo da je monoton niz.

Najčešće tehnike ispitivanja monotonosti su posmatranje količnika ili razlike dva uzastopna člana niza. Tako naprimjer, ako je $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan, imamo

$$x_{n+1}-x_n \begin{cases} >0 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono rastući} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{ niz je neopadajući} \\ <0 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono opadajući} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{ niz je nerastući} \end{cases} .$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \begin{cases} >1 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono rastući} \\ \geq 1 & \Rightarrow \text{ niz je neopadajući} \\ <1 & \Rightarrow \text{ niz je strogo monotono opadajući} \\ \leq 1 & \Rightarrow \text{ niz je nerastući} \end{cases} .$$

Primjer. Niz $x_n = \frac{1}{n}$ je strogo monotono opadajući jer za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$ imamo

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0\ .$$

Primjer. Niz $x_n = \frac{n}{n+1}$ je strogo monotono rastući jer je za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1+\frac{1}{n^2+2n} > 1\ .$$

Kriteriji konvergencije mon. nizova

Teorem 2..15. *Svaki monoton niz je ili konvergentan ili odredjeno divergentan (ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrijednost).*

Teorem 2..16. *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

U ovoj teoremi treba razlikovati dva slučaja:

1. Ako je niz monotono rastući, zahtijevamo ograničenost odozgo.
2. Ako je niz monotono opadajući, zahtijevamo da je niz ograničen odozdo.

Primjer. Posmatrajmo niz $x_n = \dfrac{n}{a^n}$ $(a > 1)$.
Kako je za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$. $n \cdot a > n + 1$, to je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n \cdot a} < 1 \ ,$$

zaključujemo da je niz strogo monotono opadajući.
Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ je $x_n = \frac{n}{a^n} > 0$, pa je dati niz ograničen odozdo.
Prema gornjoj teoremi je dati niz konvergentan, tj. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$. Pustimo li u izrazu

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n \cdot a} x_n$$

da n teži u beskonačnost imali bi da vrijedi $x_0 = \dfrac{x_0}{a}$, a zbog $a > 1$ ovo je moguće samo ako je $x_0 = 0$, pa je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \ , \ \ a > 1 \ .$$

Primjer. Pokažimo da je niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo.
Jednostavnim računom se ima

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ .$$

Na osnovu Bernoullijeve nejednakosti je

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \ , \ n \geq 2 \ ,$$

pa imamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \ .$$

Dakle niz je strogo monotono rastući.
Ako sada posmatramo i niz $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, očigledna je nejednakost $x_n \leq y_n$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Pokazati da je niz (y_n) strogo monotono opadajući, ostavljeno je za vježbu. Iz ovoga onda zaključujemo da je bilo koji član niza (y_n) gornje ograničenje niza (x_n), pa možemo reći da je $x_n \leq y_1 = 4$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.
Iz monotonosti i ograničenosti niza (x_n) zaključujemo njegovu konvergenciju.

Graničnoj vrijednosti ovog niza dajemo posebno ime (prema Euleru), a ističemo i njegovu važnost za računanje mnogih drugih limesa.

Definicija 2..17.

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .}$$

Broj e nazivamo Eulerovim brojem i on je jedna od najvažnijih matematičkih konstanti. Prvih nekoliko decimala tog broja su

$$e = 2,718281828...$$

Alati za izračunavanje limesa

Teorem 2..18. *(Teorem o lopovu i dva policajca) Neka su (x_n) i (y_n) nizovi za koje vrijedi*

1. $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = A.$
2. *Za skoro svako $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \le z_n \le y_n$.*

Tada i niz (z_n) ima graničnu vrijednost i važi $\lim_{n\to+\infty} z_n = A$.

Primjer. Ispitati konvergenciju niza $z_n = \dfrac{\ln(1+n)}{1+n^2}$.
Matematičkom indukcijom se pokazuje da vrijedi $\ln(1+n) < n$ (šta više, vrijedi $\log(1+x) < x$ za proizvoljan $x > 0$). Koristeći to imamo,

$$0 \le \frac{\ln(1+n)}{1+n^2} \le \frac{n}{1+n^2} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} .$$

Ako označimo sa $x_n = 0$, $y_n = \frac{1}{n}$, onda su uslovi gornje teoreme zadovoljeni, pa zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} z_n .$$

Primjer. Izračunati: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$.
Kako važi

$$3^n \le 2^n + 3^n \le 2\cdot 3^n ,$$

tada je

$$3 \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le 3\sqrt[n]{2} .$$

Ako označimo sa $x_n = 3$ i sa $y_n = 3\sqrt[n]{2}$, tada očigledno važi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 3 ,$$

pa na osnovu teoreme o lopovu i dva policajca vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3 .$$

Teorem 2..19. *(Stolzova teorema) Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n) i neka su zadovoljeni uslovi:*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

2. Niz (y_n) je monotono rastući, tj. $y_{n+1} \geq y_n$ za skoro svako n.

3. Postoji konačna ili beskonačna granična vrijednost $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

Tada postoji i $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ i važi jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3^n}$.
Označimo sa $x_n = n$ i sa $y_n = 3^n$. Jasno je da vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. osim toga je $3^{n+1} > 3^n$, tj. niz (y_n) je monotono rastući. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{3^{n+1}-3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\cdot 3^n} = 0\ ,$$

dakle zadovoljeni su uslovi Stolzove teoreme pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} = 0\ .$$

3. Podnizovi

Podnizovi
Ako iz niza (x_n) izdvojimo beskonačno mnogo članova u istom redoslijedu u kome se pojavljuju u datom nizu, dobijeni niz se naziva podnizom niza (x_n). Na primjer ako u nizu (x_n) posmatramo samo njegove parne članove, dobijamo podniz (x_{2k}) ili ako posmatramo svaki sedmi član imamo podniz (x_{7k}). Formalna definicija podniza je

Definicija 3..1. Neka je dat niz (x_n) i neka je $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ strogo monotono rastući niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je (x_{n_k}) podniz niza (x_n).

Podniz (x_{n_k}) može se posmatrati kao niz sa indeksima $k = 1, 2, ...$ pa sve što je do sada rečeno za nizove važi i za podnizove. Neposredno iz definicije podniza slijedi

Teorem 3..2. *Ako niz (x_n) ima graničnu vrijednost x_0, tada i bilo koji podniz (x_{n_k}) datog niza ima graničnu vrijednost x_0.*

Obrat u gornjem tvrdjenju ne važi, tj. ako neki podniz (x_{n_k}) niza (x_n) ima graničnu vrijednost, sam niz ne mora imati graničnu vrijednost. Jednostavan primjer za to je niz $x_n = (-1)^n$. Njegovi podnizovi (x_{2k}) i (x_{2k+1}) su konstantni nizovi i kao takvi konvergentni dok sam niz, kao što je to pokazano ranije, nije konvergentan. U ovom dijelu ćemo se upravo baviti odnosom izmedju konvergencije niza i konvergencije njegovih podnizova.

Definicija 3..3. Za tačku $a \in \mathbb{R}^*$ kažemo da je tačka nagomilavanja niza (x_n) ako postoji podniz (x_{n_k}) datog niza koji konvergira ka tački a.

Tačku nagomilavanja možemo definisati i na slijedeći način

Definicija 3..4. Tačka $a \in \mathbb{R}^*$ je tačka nagomilavanja niza (x_n) ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)\ |x_m - a| < \varepsilon\ .$$

Tačka nagomilavanja nije isto što i granična vrijednost niza.
Na primjer, kao što smo to vidjeli već, niz $x_n = (-1)^n$ ima dvije tačke nagomilavanja $x' = 1$ i $x'' = -1$, dok skup vrijednosti tog niza $\{-1, 1\}$ nema niti jednu tačku nagomilavanja jer je on konačan skup.
Sljedećim važnim teoremom utvrdjujemo egzistenciju tačaka nago-milavanja proizvoljnog niza.

Teorem 3..5 (Bolzano-Weierstrassov teorem)**.**
1. *Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u* $\mathbb{R}$.
2. *Svaki niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u* $\mathbb{R}^*$.

Ako sa $T(x_n)$ označimo skup svih tačaka nagomilavanja niza (x_n), onda na osnovu Bolzano-Weierstrassove teoreme zaključujemo da je on neprazan u $\mathbb{R}^*$.
Koja je gornja granica broja elemenata ovog skupa neće nas zanimati, iako treba reći da se mogu konstruisati nizovi koji imaju proizvoljno mnogo tačaka nagomilavanja, šta više, postoje nizovi za koje je svaka tačka iz $\mathbb{R}$, njihova tačka nagomilavanja.

Lema 3..6. *Neka je (x_n) proizvoljan niz i $T(x_n)$ skup njegovih tačaka nagomilavanja. Ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $T(x_n)$, onda je $x_0 \in T(x_n)$.*

Teorem 3..7. *Za proizvoljan niz (x_n), skup $T(x_n)$ ima maksimum i minimum u $\mathbb{R}^*$.*

Dokaz
Na osnovu Teorema 3..5 skup $T(x_n)$ nije prazan, pa na osnovu aksioma potpunosti ima supremum i infimum. Ako je $T(x_n)$ konačan (tj. ima konačno mnogo elemenata) tvrdjenje je trivijalno. Pretpostavimo zato da je to beskonačan skup. Ako $a = \sup T(x_n)$ nije maksimum skupa (tj. $a \notin T(x_n)$), onda na osnovu karakterizacije supremuma, tačka a bi bila tačka nagomilavanja skupa $T(x_n)$, ali onda bi na osnovu Leme 3..6 $a \in T(x_n)$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, supremum skupa $T(x_n)$ pripada tom skupu pa je on maksimum skupa. Analogno se dokazuje za infimum.

Definicija 3..8. Najveća tačka nagomilavanja niza (x_n) zove se gornji limes ili limes superior niza i označava se sa

$$\limsup x_n \ \text{ ili } \ \overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n\ .$$

Najmanja tačka nagomilavanja niza (x_n) zove se donji limes ili limes inferior i označava se sa

$$\liminf x_n \ \text{ ili } \ \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n\ .$$

Slijedeći teorem nam daje jednu karakterizaciju novouvedenih pojmova.

Teorem 3..9. *Neka je (x_n) proizvoljan realan niz i neka je $\limsup x_n = \overline{x}$. Tada važi:*

1. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ x_n < \overline{x} + \varepsilon$, *ili riječima rečeno; za svako $\varepsilon > 0$ su skoro svi članovi niza (x_n) manji od $\overline{x} + \varepsilon$.*
2. $(\forall\, \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m > n)\ x_n > \overline{x} - \varepsilon$, *ili za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo članova niza (x_n) koji su veći od $\overline{x} - \varepsilon$.*

3. *Ako tačka x^* zadovoljava uslove 1. i 2. tada je $x^* = \limsup x_n$.*

Dokaz
1. Ako ova tvrdnja ne bi bila tačna, to bi značilo da niz (x_n) ima beskonačno mnogo članova u intervalu $[\overline{x}+\varepsilon, +\infty)$. Ako te članove shvatimo kao podniz našeg niza, onda bi taj podniz imao tačku nagomilavanja koja takodje pripada tom intervalu, a što bi bila kontradikcija sa maksimalnošću limesa superior.
2. Za dokaz ove tvrdnje dovoljno je primjetiti da je skup $(\overline{x} - \varepsilon, +\infty)$ okolina tačke $\overline{x}$ i primjeniti Definiciju 3..4.
3. Pretpostavimo da postoje dva različita broja $\overline{x}$ i x' koji zadovoljavaju 1. i 2. (neka je recimo $\overline{x} < x'$). Uzmimo proizvoljno $x \in (\overline{x}, x')$. Kako $\overline{x}$ zadovoljava 1., to je $x_n < x$ za sve $n > n_0$. Ali tada u okolini $(x, +\infty)$ ima samo konačno mnogo članova niza, pa x' ne zadovoljava uslov 2. Dakle, ne mogu postojati dvije tačke koje zadovoljavaju oba uslova. $\square$

Primjer. Posmatrajmo niz $x_n = (-1)^n$.
$T(x_n) = \{-1, 1\}$ pa je $\limsup x_n = 1$, a $\liminf x_n = -1$. Primjetimo da je skup vrijednosti niza $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ i da on kao konačan skup nema tačaka nagomilavanja.

Primjer. Posmatrajmo niz $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
Skup vrijednosti niza je $\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$. Nije teško vidjeti da je supremum ovog skupa jednak $\frac{1}{2}$ i da je infimum skupa -1. Medjutim, kako je ovo konvergentan niz, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, to je $T(x_n) = \{0\}$, pa važi

$$\limsup x_n = \liminf x_n = 0 \ .$$

Primjer. Posmatrajmo niz $x_n = n^{(-1)^n}$.
Podniz (x_{2k}) našeg niza je niz čiji je opšti član $x_{2k} = 2k$ i on teži ka $+\infty$ kada k teži u beskonačnost. S druge strane podniz $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \to 0$ kada $k \to +\infty$, pa je dakle $T(x_n) = \{0, +\infty\}$, odakle zaključujemo da važi

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = +\infty \ \ , \ \ \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = 0 \ .$$

Konstatujmo najzad da iz navedenih tvrdjenja neposredno slijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 3..10. *Neka je (x_n) proizvoljan realan niz.*

1. *Niz (x_n) ima graničnu vrijednost ako i samo ako je*

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n \ ,$$

tj. ako i samo ako niz ima samo jednu tačku nagomilavanja.

2. *Niz (x_n) konvergira (tj. ima konačnu graničnu vrijednost) ako i samo ako je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$ konačan broj, tj. ako i samo ako ima samo jednu tačku nagomilavanja i ta je konačan broj.*

4. Definicija i osobine brojnog reda

Definicija brojnog reda
Neka je dat niz realnih brojeva $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Izraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ , \tag{4}$$

naziva se beskonačnim redom s opštim članom a_n, ili realnim brojnim redom. Zbirovi

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

nazivaju se parcijalnim sumama reda (4), tj. za izraz

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \ , \ \ n \in \mathbb{N}$$

kažemo da je n-ta parcijalna suma reda (4).

Definicija 4..1. Ako postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, niza (s_n) parcijalnih suma reda (4), onda kažemo da je red konvergentan i da mu je suma jednaka s. Tada pišemo

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Za red koji ne konvergira (bilo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$, bilo da taj limes ne postoji) kažemo da je divergentan.

Primjer. Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ gdje je $q \neq 0$. Dati red se naziva geometrijskim redom. Njegova n-ta parcijalna suma je

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ ,$$

ako je $q \neq 1$. Odavde se lako vidi da vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \ \ , \ \ |q| < 1 \ .$$

Ako je $|q| \geq 1$, dati red divergira.

Specijalno, ako je $q = -1$ imamo red čija je n-ta parcijalna suma

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ... \pm 1 = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ paran broj} \\ 0 & , \quad n \text{ neparan broj} \end{cases}$$

pa u ovom slučaju $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ ne postoji, tj. red je divergentan.

Primjer. Posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Opšti član datog reda možemo zapisati sa

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n \ ,$$

te je n-ta parcijalna suma jednaka

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \ .$$

Odavde sada imamo da je $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$,

pa je dati red divergentan.

Uporedo sa redom (4) posmatrajmo i red

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \ , \tag{5}$$

koga nazivamo m-ti ostatak reda (4) i označavamo ga sa r_m. Veza konvergencije reda (4) i konvergencije reda (5) data je sa:

Teorem 4..2.

1. *Red (4) konvergira ako i samo ako konvergira red (5).*
2. *Red (4) konvergira ako i samo ako njegov ostatak r_n teži nuli kada $n \to +\infty$.*

Dokaz:
1. Označimo sa s_n n-tu parcijalnu sumu reda (4) i sa s'_k k-tu parcijalnu sumu reda (5). Očigledno tada vrijedi jednakost

$$s'_k = s_{n+k} - s_n \ .$$

Ako je $\lim_{k\to+\infty} s_{n+k} = s$, onda je $\lim_{k\to+\infty} s'_k = s - s_n$, tj. iz konvergencije reda (4) slijedi konvergencija reda (5). Iz $\lim_{k\to+\infty} s'_k = s'$ imali bi da je $\lim_{k\to+\infty} s_{n+k} = s' + s_n$, pa važi i obrat.

2. Red (4) možemo zapisati kao

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_n + r_n \ .$$

Ako taj red konvergira i ima sumu s, onda je $r_n = s - s_n$, odakle je

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s - s_n) = 0 \ .$$

Obratno, ako ostatak r_n teži ka nuli kada $n \to +\infty$, iz prvog dijela teoreme slijedi da red (4) konvergira.

4.1. Kriteriji konvergencije redova

Kriteriji konvergencije redova

Teorem 4..3 (Cauchyjev kriterij konvergencije). *Red (4) konvergira ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon)\ .$$

Teorem 4..4. *Neka su dati redovi* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$*. Tada vrijedi:*

1. *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira, tada konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty} a x_n$ *(*$a \in \mathbb{R}$*) i pri tome vrijedi*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a x_n = a \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ .$$
2. *Ako oba reda konvergiraju, tada konvergira i red* $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ *i pri tome vrijedi:*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n\ .$$

Teorem 4..5 (Neophodan uslov konv. reda). *Ako red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira, onda vrijedi* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Dokaz:
Iz jednakosti $s_n - s_{n-1} = x_n$ $(n > 1)$, direktno slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = 0\ .$$

Primjer. Posmatrajmo harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Opšti član ovog reda je $x_n = \frac{1}{n}$ i očigledno je $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.
Primjetimo kao prvo da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\ . \tag{6}$$

Grupišemo li članove našeg reda na slijedeći način

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots\ ,$$

koristeći (6), svaki od sabiraka u zagradi je veći od $\frac{1}{2}$, pa je suma takvih brojeva beskonačna tj. dati red je divergentan.
Spomenimo ovdje jedan važan red:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ je konvergentan ako je } \alpha > 1\text{, a divergentan ako je } \alpha \leq 1}$$

Posljedica 4..6. *Ako je* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$*, tada je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergentan.*

Primjer. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0 \ ,$$

to po navedenoj posljedici polazni red nije konvergentan.

5. Redovi sa pozitivnim članovima

Ako su skoro svi članovi reda (x_n) nenegativni, onda za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

kažemo da je red sa pozitivnim članovima. Specifičnost ovih redova je u tome što je niz (s_n) parcijalnih suma datog reda monotono rastući niz, pa je za konvergenciju tog niza, na osnovu teorema o konvergenciji monotonih i ograničenih nizova, dovoljna još i ograničenost tog niza.

Teorem 5..1. *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *s pozitivnim članovima je konvergentan ako i samo ako je niz njegovih parcijalnih suma ograničen.*

Primjer. Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Ovo je red sa pozitivnim članovima, pa je za njegovu konvergenciju dovoljno utvrditi ograničenost niza parcijalnih suma. Posmatrajmo zato

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Kako je $1 - \frac{1}{n+1} < 1$, zaključujemo da je niz (s_n) ograničen, tj. polazni red je konvergentan. Šta više, ovdje imamo da je

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \ .$$

5.1. Kriteriji konvergencije

Teorem 5..2 (Kriterij uporedjivanja)**.** *Neka za opšte članove redova* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(1) i* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *(2) postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je za* $n \geq n_0$, $x_n \leq y_n$. *Tada vrijedi,*

1. *iz konvergencije reda (2) slijedi konvergencija reda (1),*
2. *iz divergencije reda (1) slijedi divergencija reda (2).*

Primjer. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n^4+2n^2+1}$. Kako je

$$x_n = \frac{3n}{4n^4+2n^2+1} \leq \frac{3n}{4n^4} = \frac{3}{4n^3} \leq \frac{1}{n^3} = y_n \ ,$$

a kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergentan, to je i polazni red, na osnovu kriterija uporedjivanja, konvergentan.

Primjer. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n+1}{2^n}$. Kako je

$$x_n = \frac{n3^n+1}{2^n} \geq \frac{n3^n}{2^n} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n = y_n \ ,$$

a red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ je divergentan, to je i polazni red, na osnovu kriterija uporedjivanja, divergentan.

Teorem 5..3 (D'Alambertov kriterij)**.**

1. *Ako za red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \mathbb{R}$, *takvi da je za* $n \geq n_0$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \ ,$$
dati red je konvergentan. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, *takvo da je za* $n \geq n_0$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \ ,$$
dati red je divergentan.

2. *Neka za članove datog reda postoji* $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. *Tada, ako je* $l < 1$ *dati red je konvergentan, a ako je* $l > 1$ *dati red je divergentan.*

Primjer. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{3^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+n+1}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+3}{3(n^2+n+1)} = \frac{1}{3} < 1 \ ,$$

pa na osnovu D'Alambertovog kriterija je polazni red konvergentan.

Teorem 5..4 (Cauchyjev korijeni kriterij). *1. Ako za red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \mathbb{R}$*, takvi da je za* $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \ ,$$

tada je dati red konvergentan.

Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je za* $n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \ ,$$

tada je dati red divergentan.

2. *Neka postoji* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$*. Tada, ako je* $l < 1$ *red konvergira, a ako je* $l > 1$ *red divergira.*

Primjer. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right)^n} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}\right) = 2 > 1 \ ,$$

pa na osnovu Cauchyjevog korijenog kriterija zaključujemo da je dati red divergentan.

Teorem 5..5 (Kummerov kriterij). *Neka je* (c_n) *niz pozitivnih realnih brojeva, takav da je red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *divergentan i neka je dat red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
Označimo sa $K_n = c_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - c_{n+1}$*, gdje je* x_n *opšti član reda* ($n \in \mathbb{N}$).

1. *Ako postoji* $\delta \geq 0$ *i* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takvi da je za* $n \geq n_0$*,* $K_n \geq \delta$*, onda dati red konvergira. Ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je za* $n \geq n_0$*,* $K_n \leq 0$*, onda dati red divergira.*

2. *Neka postoji* $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = l$*. Ako je* $l > 0$ *red konvergira, a ako je* $l < 0$ *rad divergira.*

Specijalno, ako u Kummerovom kriteriju izaberemo da je $c_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$), dobijamo kriterij koji se naziva Raabeov kriterij konvergencije i on glasi:
Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$ ispunjeno

$$n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \geq q > 1 \ ,$$

onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentan. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je za $n \geq n_0$ ispunjeno

$$n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \leq 1 \ ,$$

dati red je divergentan. Ako postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) = l$, onda je polazni red konvergentan za $l > 1$, a divergentan za $l < 1$.

Redovi sa proizvoljnim članovima
Neka je dat realan numerički red

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ . \tag{7}$$

Teorem 5..6. *Ako je red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \tag{8}$$

konvergentan, konvergentan je i red (7).

Dokaz:
Dokaz slijedi na osnovu Cauchyjevog opšteg kriterija konvergencije redova i nejednakosti

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \le |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}|$$

Definicija 5..7. Ako red (8) konvergira, kažemo da red (7) konvergira apsolutno.
Za red (7) kažemo da konvergira uslovno ako je on konvergentan, a pri tome ne konvergira apsolutno.

Od svih redova sa proizvoljnim članovima mi ćemo se pozabaviti jednom specijalnom klasom, a to su redovi oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots \ ,$$

gdje su c_n realni brojevi istog znaka. Ovakve redove nazivamo alternacijskim redovima.

Teorem 5..8 (Leibnitzov kriterij)**.** *Neka je dat alternacijski red* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$*. Ako je niz* (x_n) *monotono opadajući (* $x_{n+1} \le x_n$ *) i ako je* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$*, tada je red konvergentan.*

Primjer. Posmatrajmo alternacijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Koristeći notaciju u Leibnitzovom kriteriju, imamo da je niz zadat sa $x_n = \frac{1}{n}$, monotono opadajući jer za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = x_n \ ,$$

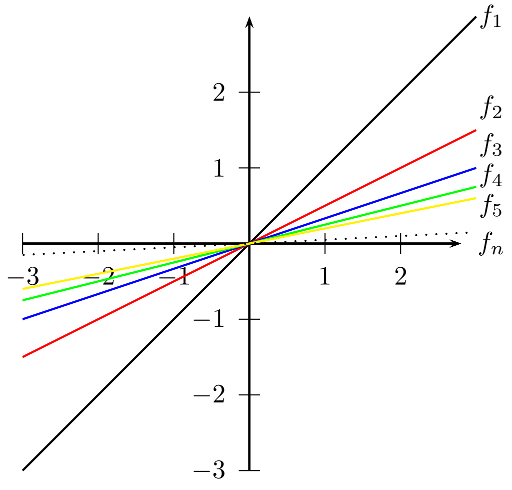
i $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sada na osnovu tog kriterija zaključujemo da je dati red konvergentan. Primjetimo da je ova konvergencija uslovna jer red sa apsolutnim vrijednostima, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan.

6. Funkcionalni nizovi

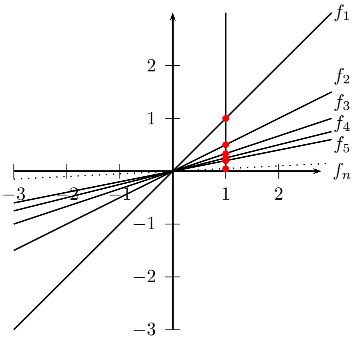
Do sada smo razmatrali smo "obične" numeričke nizove i redove. Pod ovim "obične" želi se istaći da smo posmatrali nizove i redove čiji su članovi, odnosno sabirci, obični realni brojevi.
Medjutim, u prilici smo često razmatrati nizove "bilo čega", ljudi, dana, otkucaja srca i sl.
U ovom poglavlju ćemo razmatrati nizove čiji su članovi funkcije, tzv. funkcionalne nizove, a onda ćemo po sličnom receptu kao i kod numeričkih nizova, uvesti i pojam funkcionalnog reda, reda kod koga sabiramo funkcije.

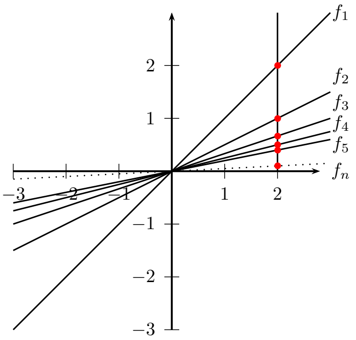
Funkcionalni nizovi
Oznakom $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ćemo označavati beskonačni funkcionalni niz, podrazumijevajući da su f_n ($n \in \mathbb{N}$) funkcije. Kada kažemo da je funkcionalni niz definisan na nekom skupu, smatramo da je svaka funkcija tog niza definisana na tom skupu.

Primjer. Posmatrajmo funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definisan na $\mathbb{R}$, gdje je za $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.
Svaku od funkcija možemo predstaviti grafički, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{x}{2}$, $f_3(x) = \dfrac{x}{3}$, $f_4(x) = \dfrac{x}{4}$, $f_5(x) = \dfrac{x}{5}$ itd., i one predstavljaju prave linije koje prolaze kroz koordinatni početak i imaju sve manji nagib prema x-osi.



Izaberemo li neko konkretno $x \in \mathbb{R}$, npr $x = 1$, dati funkcionalni niz postaje obični numerički niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, čije ponašanje sada možemo ispitivati alatima usvojenim u prethodnom poglavlju.
I ovu činjenicu možemo predstaviti grafički a dobijamo to tako što kroz tačku $x = 1$ povučemo vertikalnu pravu, koja u presjeku sa funkcijama f_n daje upravo tačke koje predstavljaju niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.





U gornjem primjeru smo uzimajući konkretno $x = 1$ (slika lijevo), od funkcionalnog niza dobili numerički niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, koji je konvergentan, šta više

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \; .$$

Uzimajući neku drugu vrijednost, npr. $x = 2$ (slika desno), naš funkcionalni niz opet postaje konvergentan numerički niz $\left(\frac{2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, koji takodje konvergira ka 0.
Uzimajući bilo koju konkretnu vrijednost $x = M \in \mathbb{R}$, nije teško uvjeriti se da će vrijediti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n} = 0 \; .$$

Dakle, naš niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, za proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ je konvergentan numerički niz, tj. vrijedi

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \; .$$

Pri tome, formalno možemo reći da funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka funkciji $f(x) = 0$, ali "samo" u svim tačkama skupa na kome je definisan niz. Ovakvu osobinu funkcionalnog niza nazivamo "obična" konvergencija ili *konvergencija po tačkama*.

6.1. Konvergencija po tačkama

Konvergencija po tačkama

Definicija 6..1. Neka je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definisan na skupu $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan po tačkama, ako vrijedi

$$(\forall x \in A) \text{ postoji konačan } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \; .$$

Činjenica da postoji konačan $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, za svako $x \in A$, obezbjedjuje nam postojanje neke funkcije $f(x)$ za koju onda važi

$$(\forall x \in A) \; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \; , \tag{9}$$

i tada kažemo da niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po tačkama ili tačkasto ka funkciji $f(x)$. Ako raspišemo limes u (9), onda definicija konvergencije po tačkama glasi

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \; . \tag{10}$$

Primjer. Posmatrajmo funkcionalni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zadat sa

$$n \in \mathbb{N}\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ f_n(x) = \frac{nx + x^2}{n^2}\ .$$

Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2}\right) = x \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 + 0 = 0\ .$$

Dakle, posmatrani niz konvergira po tačkama ka nula-funkciji, tj. funkciji identički jednakoj 0 ($f \equiv 0$).

Primjer. Zadat je funkcionalni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definisan na $[0,1]$, sa

$$f_n(x) = n^2 x^n\ .$$

Primjetimo kao prvo da je za sve $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$. Dakle, niz $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ je konstantni niz i konvergira ka 0. Neka je sada $x \in (0,1)$, proizvoljan. Zbog jednakosti

$$n^2 x^n = n^2 e^{\ln x^n} = n^2 e^{n \ln x}$$

i kako je $\ln x < 0$ za $x \in (0,1)$, na osnovu poznatog nam iz numeričkih nizova, zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ ,\ x \in (0,1)\ .$$

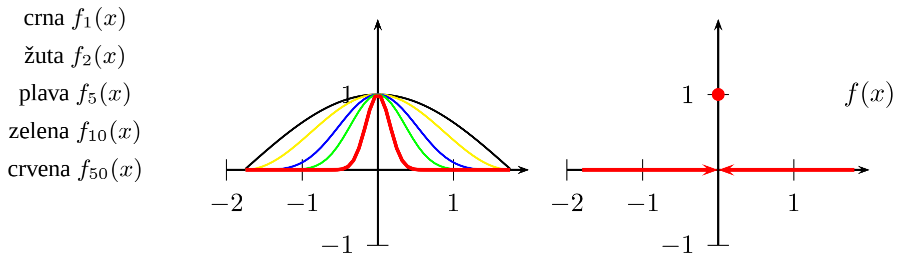
Konačno, uzimajući $x = 1$, imamo $f_n(1) = n^2$ i pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty\ ,$$

pa na osnovu svega ovoga zaključujemo da polazni funkcionalni niz nije konvergentan po tačkama.

Primjer. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = \cos^n x$, definisan na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Dokazati da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ postoji i konačan je za sve $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i da konvergira po tačkama ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \text{ ili } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$



6.2. Uniformna konvergencija

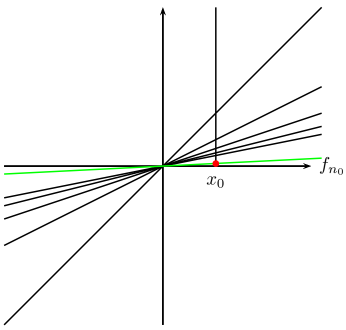
Uniformna konvergencija

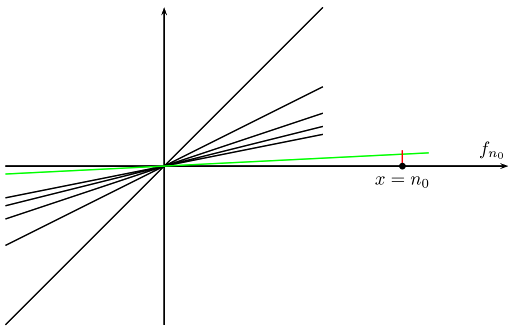
Definicija 6..2. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih funkcija definisanih na A. Kažemo da dati niz uniformno konvergira ka funkciji f na skupu A ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \ .$$

Iz same definicije uniformne konvergencije funkcionalnog niza vidimo da je postojeći n_0 ovisan samo o ε, za razliku od konvergencije po tačkama, pa je time uniformna konvergencija "jača" od konvergencije po tačkama.
Drugačije rečeno, ako je niz uniformo konvergentan, onda je on konvergentan i po tačkama. Obrat u opštem slučaju ne mora da važi.

Primjer. U primjeru 114 posmatrali smo niz funkcija zadatih sa $f_n(x) = \frac{x}{n}$ i vidjeli smo da je taj niz konvergentan po tačkama ka funkciji $f \equiv 0$. Ovo je značilo da za ma koje fiksirano x_0, možemo naći funkciju f_{n_0}, koja je u toj tački proizvoljno blizu funkciji f (x-osi). To je prikazano na slici lijevo.





Medjutim, uniformna konvergencija zahtjeva da ta ista funkcija f_{n_0} ima tu osobinu (proizvoljno bliska funkciji f) u svakoj tački, a što očigledno nije tačno samo ako se dovoljno udaljimo na x-osi (slika desno). Tj. uzmemo li da je $x = n_0$, tada imamo

$$f_{n_0}(x) = \frac{n_0}{n_0} = 1 \ ,$$

te je dakle u ovoj tački naša funkcija f_{n_0} za 1 udaljena od x-ose. Odemo li još dalje sa x-om, npr. neka je $x = 2n_0$, tada je $f_{n_0}(x) = 2$, dakle još dalje od x-ose. Ovo nam pokazuje da je u jednom "trenutku" funkcija f_{n_0} zaista blizu funkciji $f \equiv 0$, ali da njeno rastojanje od te iste funkcije možemo učiniti proizvoljno velikim, samo treba otići dovoljno daleko na x-osi. Tj. za svaki x_0 možemo naći funkciju f_{n_0} koja je dovoljno bliska funkciji f, ali jedna zajednička funkcija f_n koja je proizvoljno bliska funkciji f za sve x-ove, ne postoji, te ovaj niz nije uniformno konvergentan.

Primjer. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz definisan na $(0, +\infty)$, definisan sa

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} \ .$$

Za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $1 + n^2x^2 \sim n^2x^2$, tj. ova dva niza su asimptotski jednaki, što ekvivalentno znači

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2}{1 + n^2x^2} = 1 \ ,$$

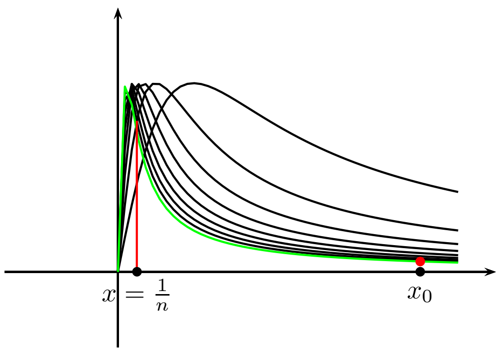
a ovo nam onda omogućava sljedeće rezonovanje

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \; .$$

Dakle, posmatrani niz je konvergentan po tačkama i konvergira ka funkciji $f \equiv 0$. Medjutim, neka je $\varepsilon < \frac{1}{2}$ proizvoljan. Izaberemo li $x = \frac{1}{n}$, tada imamo

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} - 0\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon \; .$$

Vidimo da niti za jedno $n \in \mathbb{N}$ razliku $|f_n(x) - f(x)|$ ne možemo učiniti manjom od $\frac{1}{2}$, pa dakle ni manjom od ε, time posmatrani niz nije uniformno konvergentan. Na sljedećoj slici prikazan je posmatrani niz grafički, a objašnjenje zašto se nema uniformna konvergencija je identično kao u prethodnom primjeru, samo treba posmatrati tačke dovoljno bliske tački 0.



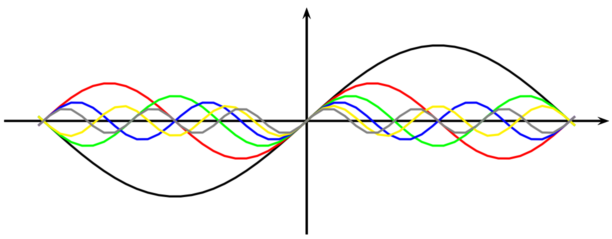
Primjer. Posmatrajmo niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, definisan za sve $x \in \mathbb{R}$ sa

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \; .$$

Nejednakost

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} \; ,$$

vrijedi neovisno o $x \in \mathbb{R}$. Kako pri tome za proizvoljno maleno $\varepsilon > 0$, broj $\frac{1}{n}$ možemo učiniti manjim od njega, za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je dati niz uniformno konvergentan.



Teorem 6..3. *Neka su* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *funkcionalni nizovi.*

1. *Ako su dati nizovi uniformno konvergentni na skupu* $A \subseteq \mathbb{R}$*, tada je i niz* $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergentan na tom skupu.*

2. *Ako je niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergentan na skupu* $A \subseteq \mathbb{R}$*, tada je on uniformno konvergentan na proizvoljnom podskupu od* A*.*

3. *Ako je niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergentan na skupovima* $A, B \subseteq \mathbb{R}$*, tada je on uniformno konvergentan i na* $A \cup B$*.*

6.3. Značaj uniformne konvergencije

Značaj uniformne konvergencije imamo u raznim izračunavanjima kod kojih je bitan granični proces.

Primjer. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = (1-x)^n$, definisan na intervalu $(0,2)$. Za proizvoljan $x \in (0,2)$ je $|1-x| < 1$, pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ ,$$

a tim prije će vrijediti onda i

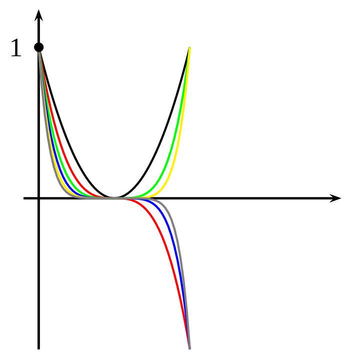
$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

S druge strane zbog $f_n(0) = 1$, imamo

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 \ .$$

Iako nekako neočekivano, ipak vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0} f_n(x) \neq \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$



Teorem 6..4. *Neka je niz* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *uniformno konvergentan na skupu* I*, ka funkciji* $f(x)$*. Ako za svako* $n \in \mathbb{N}$ *postoji konačan* $\lim_{x\to a} f_n(x)$ *(*a *je tačka nagomilavanja skipa* I*), tada postoji i konačna je, granična vrijednost* $\lim_{x\to a} f(x)$ *i pri tome vrijedi*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Dakle, pod pretpostavkom uniformne konvergencije funkcionalnog niza, dozvoljena je zamjena dvaju graničnih procesa koji djeluju na funkcionalni niz. Iz ove teoreme takodje neposredno sleduje i mnogo važnija tvrdnja. Naime, granična funkcija $f(x)$, uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija je i sama neprekidna funkcija. Zaista, za proizvoljno $a \in I$, ako su sve funkcije f_n neprekidne, onda vrijedi

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a) \; .$$

Sada zbog uniformne konvergencije i prethodne teoreme imamo

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) \; .$$

Ovo iskazujemo u obliku teoreme

Teorem 6..5. *Neka funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka funkciji $f(x)$, na skupu I. Ako su sve funkcije f_n neprekidne na I, tada je i funkcija f neprekidna na I.*

Teorem 6..6. *Neka je dat funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, čije su funkcije definisane i diferencijabilne na intervalu (a,b). Pretpostavimo da je naš niz konvergentan u bar jednoj tački intervala (a,b) i neka je niz $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na (a,b). Tada je i niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan, a granična funkcija ovog niza je diferencijabilna na (a,b) i vrijedi*

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \; .$$

Primjer. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \; ,$$

i kao što smo to pokazali, on je uniformno konvergentan na $\mathbb{R}$. Medjutim, odgovarajući "izvodni" niz glasi

$$f_n'(x) = \cos nx \; ,$$

a ovaj niz nije konvergentan čak ni po tačkama.

Teorem 6..7. *Neka je niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergentan na segmentu $[a,b]$ i neka su sve funkcije f_n integrabilne na tom segmentu. Tada je i granična funkcija posmatranog niza integrabilna na $[a,b]$ i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \; .$$

Primjer. Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{ndx}{x^3+n}$.
Rješavanje ovakvog problema svodi se na to da prvo riješimo integral, a zatim rješavamo preostali limes. Medjutim, ako smijemo zamjeniti mjesta limesa i integrala, s obzirom na činjenicu da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, rješenje je trivijalno

$$\int_0^1 1dx = 1 \; .$$

Ostaje samo vidjeti da li smijemo izvršiti navedenu zamjenu, tj. da li je funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = \dfrac{n}{x^3+n}$ uniformno konvergentan.
Za $x \in [0,1]$ vrijedi

$$0 \leq \left|1 - \frac{n}{x^3+n}\right| = \frac{x^3}{x^3+n} \leq \frac{1}{n}\ ,$$

pa je naš niz uniformno konvergentan, a time je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ndx}{x^3+n} = 1\ .$$

Primjer. Posmatrajmo funkcionalni niz zadat sa $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx}dx = 1-(n+1)e^{-n}\ ,$$

a onda imamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1\ .$$

S druge strane, za proizvoljno $x \in [0,1]$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} n^2xe^{-nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x}{e^{nx}} = 0\ .$$

Ovo bi onda značilo da je

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0\ ,$$

pa dakle zamjena limesa i integrala u ovom primjeru nije opravdana.

7. Funkcionalni redovi

7.1. Definicija i osobine

Za zadati funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, izraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \tag{11}$$

nazivamo funkcionalni red. Slično kao kod numeričkih redova, uvodimo pojam parcijalnih suma. Izraz

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ ,$$

nazivamo n-ta parcijalna suma reda (11), a izraz

$$r_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)$$

nazivano n-ti ostatak reda (11).

Definicija 7..1. Za red (11) kažemo da je uniformno konvergentan na skupu I ako njegov niz parcijalnih suma $S_n(x)$ uniformno konvergira ka sumi $S(x)$ ovog reda na skupu I.

Teorem 7..2. *Red (11) uniformno konvergira na skupu I ako i samo ako niz $r_n(x)$ njegovih ostataka uniformno konvergira ka funkciji identički jednakoj 0 na skupu I.*

Teorem 7..3 (Cauchyjev kriterij uniformne konvergencije)**.** *Red (11) uniformno konvergira na skupu I ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in I)$$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \ .$$

Pored ovoga, veoma jednostavan i koristan kriterij za uniformnu konvergenciju dat je sljedećom teoremom.

Teorem 7..4 (Weierstrassov kriterij uniformne konvergencije)**.** *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivan numerički niz za koga vrijedi da je za skoro svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $x \in I$ zadovoljeno*

$$|f_n(x)| \leq a_n \ .$$

Ako je red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergentan, tada je red (11) uniformno konvergentan na skupu I.

Primjer. Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \ ,$$

je uniformno konvergentan na $\mathbb{R}$ jer za bilo koje $x \in \mathbb{R}$ i za bilo koje $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \ ,$$

a kao što nam je poznato, svi redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ , \ \alpha > 1$$

su konvergentni.

Teorem 7..5 (Abelov test uniformne konvergencije)**.** *Ako važe uslovi*

1. *Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ je monoton za svae $x \in I$ i uniformno ograničen (tj. postoji univerzalna konstanta $M \in \mathbb{R}$, takva da je $|f_n(x)| \leq M$, za sve $x \in I$ i za sve $n \in \mathbb{N}$).*

2. *Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je uniformno konvergentan na I.*

Tada je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ uniformno konvergentan na I.

Primjer. Ispitati uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2(n+x)} ,$$

na intervalu $(0, +\infty)$.
Označimo sa

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} , \; g_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2} .$$

Za proizvoljne $x \in (0, +\infty)$ i $n \in \mathbb{N}$, očigledno vrijedi $|f_n(x)| \leq 1$, te je prvi niz uniformno ograničen. Osim toga je

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+x} = f_n(x) ,$$

pa je on i monotono opadajući. Dakle zadovoljen je prvi uslov Abelovog kriterija.

Kako za drugi niz vrijedi

$$|g_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} ,$$

za proizvoljno $x \in (0, +\infty)$ i za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, na osnovu Weierstrassovog kriterija red $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je uniformno konvergentan, te je zadovoljen i drugi uslov. Na osnovu Abelovog kriterija, polazni red je uniformno konvergentan.

Teorem 7..6 (Dirichletov test uniformne konvergencije)**.** *Neka su zadovoljeni uslovi*

1. *Za svako $x \in I$ je funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton i uniformno teži ka 0 na skupu I.*
2. *Niz parcijalnih suma $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ je uniformno ograničen na I.*

Tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ uniformno konvergentan na I.

Primjer. Ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$, $(x \in (0, +\infty))$.
Označimo sa

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} , \; g_n(x) = (-1)^n .$$

Kao i malo prije, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono opadajući niz i neovisno o $x \in (0, +\infty)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 .$$

Za parcijalne sume $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, očigledno vrijedi $|S_n(x)| \leq 1$. Dakle, zadovoljena su oba oslova, pa na osnovu Dirichletovog testa, polazni red je uniformno konvergentan.

U slučaju uniformne konvergencije datog reda, ta funkcija je potpuno odredjena i tada pišemo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ .$$

Teorem 7..7. *Ako je red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformno konvergentan na skupu* I *i ako za svaki prirodan broj* n *postoji i konačan je* $\lim_{x\to a} f_n(x)$*, gdje je* a *tačka nagomilavanja skupa* I*, tada vrijedi*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) \ ,$$

pri čemu je red na desnoj strani gornje jednakosti konvergentan.

Teorem 7..8. *Ako su funkcije* $f_n(x)$ *neprekidne za svako* $n \in \mathbb{N}$ *na skupu* I *i ako je red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformno konvergentan tada je i funkcija*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ ,$$

neprekidna na skupu I*.*

Posmatrajmo sada funkcionalni red definisan sa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \ .$$

Abelovim testom se lako pokazuje da je dati red uniformno konvergentan na čitavom $\mathbb{R}$. Dakle, dati red definiše neku funkciju $f(x)$ na $\mathbb{R}$, tj.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \ .$$

Logičnim se postavlja pitanje, a šta je izvod ovako definisane funkcije? Ishitren odgovor bi bio zasnovan na ranije upoznatoj činjenici da je izvod zbira funkcija jednak zbiru izvoda tih funkcija jer se to pra-vilo odnosilo na zbir od konačno mnogo funkcija. Ako bi smo ipak postupili tako, imali bi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2 x) \ .$$

Ali trivijalno je vidljivo da suma na desnoj strani nije konvergentan red čak niti za jedno $x \in \mathbb{R}$, a to onda znači da izraz na lijevoj strani, $f'(x)$, uopšte ne postoji.

Teorem 7..9. *Neka je red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergentan u bar jednoj tački intervala* (a, b) *i neka su funkcije* $f_n(x)$ *diferencijabilne na* (a, b)*, za svako* $n \in \mathbb{N}$*. Ako je red* $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

uniformno konvergentan na (a,b), tada je takav i red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *i pri tome vrijedi*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\ ,\ x \in (a,b)\ .$$

Teorem 7..10. *Neka je red* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformno konvergentan na segmentu* $[a,b]$ *i neka su funkcije* $f_n(x)$ *integrabilne na tom segmentu, za svako* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je i suma reda integrabilna na segmentu* $[a,b]$ *i pri tome vrijedi*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ .$$

7.2. Stepeni redovi

Stepeni redovi

Pod pojmom stepene funkcije podrazumijevamo funkciju oblika $f(x) = cx^n$, $n \in \mathbb{N}$. Specijalan slučaj funkcionalnog reda, kada su funkcije koje sabiramo stepene funkcije, nazivamo stepeni red. Dakle, ako je za $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = a_n x^n$, tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\ , \tag{12}$$

nazivamo stepeni ili potencijalni red.

Na primjer, suma geometrijskog niza $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, predstavlja jedan stepeni red.

Neke elementarne tvrdnje o konvergenciji ovakvih redova imamo upravo iz njihovog oblika.

Teorem 7..11. *Neka je red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *konvergentan za neko konkretno* $x_0 \neq 0$. *Tada je on apsolutno konvergentan za svako* x *za koga važi* $|x| < |x_0|$, *a uniformno je konvergentan za svako* x *za koga je* $|x| \leq r$, *gdje je* $r < |x|$.

DOKAZ: Neka je za $x_0 \neq 0$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergentan. Tada njegov opšti član mora težiti 0, a time je on kao konvergentan niz i ograničen. Dakle, postoji konstanta $M > 0$, takva da je za sve $n \in \mathbb{N}$ zadovoljeno $|a_n x_0^n| \leq M$. Neka je sada $|x| < |x_0|$. Tada vrijedi

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leq M \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|\ .$$

Kako je količnik $\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| < 1$, to je red $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|^n$, kao suma geometrijskog reda, konvergentan, a onda na osnovu poredbenog kriterija je i red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ konvergentan. Drugačije rečeno, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ je apsoutno konvergentan.

Dokažimo sada i drugi dio tvrdjenja, tj. neka je $|x| \leq r$, gdje je $r < |x_0|$. Na osnovu prvog dijela dokaza, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ je apsolutno konvergentan. Kako za izabrano x vrijedi

$$|a_n x^n| = |a_n||x^n| \leq |a_n| r^n \ ,$$

na osnovu Weierstrassovog kriterija imamo uniformnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Teorem 7..12. *Ako stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergira u tački $x_0 \neq 0$, tada je ovaj red divergentan i za svako x koje zadovoljava $|x| > |x_0|$.*

DOKAZ: Ako bi smo pretpostavili suprotno, tj. neka je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ divergentan i neka je za neko x, takvo da je $|x| > |x_0|$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergentan. Tada bi smo prema prethodnoj teoremi morali imati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$, što je očigledno kontradiktorno.
Kako je svaki stepeni red konvergentan u tački $x = 0$, ako imamo konvergenciju i u nekoj tački $x_0 \neq 0$, na osnovu Teoreme 7..11 zaključujemo da je taj red konvergentan na intervalu $(-x_0, x_0)$.
Analogno, ako stepeni red divergira u nekoj tački x_1, na osnovu Teorema 7..12 on je divergentan i na skupu $(-\infty, -x_1] \cup [x_1, +\infty)$. Na osnovu svega rečenog zaključujemo da za proizvoljan stepeni red postoji neka granična veličina R, takva da je unutar $(-R, R)$ dati red konvergentan, a van tog intervala ($R < +\infty$) posmatrani red je divergentan.
Ovo nas navodi da takvu veličinu i definišemo.

Definicija 7..13. Za zadati stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, broj

$$R = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x| \mid \text{ red } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergira} \right\} ,$$

nazivamo poluprečnik konvergencije posmatranog reda.

Kao direktna posljedica Teorema 7..11 i Teorema 7..12 imamo sljedeće

Teorem 7..14. *Neka je R poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Tada vrijedi*

1. *U svakoj tački intervala $(-R, R)$ red apsolutno konvergira, a divergira izvan tog intervala, tj. za $|x| > R$.*

2. *Red uniformno konvergira na svakom segmentu $[-r, r]$, gdje je $r < R$, kao i uopšte na bilo kom segmentu sadržanom u $(-R, R)$.*

Jasno je na osnovu gornje teoreme da se konkretno u tačkama R i $-R$ ne može jednoznačno dati odgovor o konvergenciji reda. U tim tačkama se ispitivanje konvergencije uvijek sprovodi zasebno, ali tada imamo olakšavajuću okolnost jer je tada posmatrani red čisto numerički red.
Kako je konvergencija stepenog reda unutar intervala $(-R, R)$ apsolutna, poluprečnik konvergencije stepenog reda se može odre-diti iz opšteg Cauchyjevog kriterija konvergencije pozitivnih redova. Naime, red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x|^n$ ili konvergira ili divergira u zavisnosti da li je izraz

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

manji od 1 ili veći od 1. Iz ovoga onda imamo da će red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ apsolutno konvergirati za sve one vrijednosti x za koje je zadovoljeno

$$|x| < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} ,$$

a da će divergirati za sve x za koje je

$$|x| > \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Teorem 7..15 (Cauchy-Hadamardov teorem)**.** *Poluprečnik konvergencije stepenog reda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *je dat sa*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$*, tada je* $R = 0$*, tj. red je konvergentan samo u tački* $x = 0$*.*
Ako je $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$*, tada je* $R = +\infty$*, tj. red je konvergentan za sve* $x \in \mathbb{R}$*.*

Pored ovog načina izračunavanja poluprečnika konvergencije stepenog reda, i sljedeća formula je veoma pogodna za to

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Primjer. Za stepeni red $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, imamo da je za sve $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, pa je

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1 .$$

Primjer. Posmatrajmo stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{(n-1)} x^n .$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)n}{3^{n+1}(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} .$$

Koristeći se teoremama o graničnoj vrijednosti funkcionalnog reda, diferenciranju i integriranju funkcionalnog reda član po član, dobijamo sljedeće korisne tvrdnje. Neka je $f(x)$ suma stepenog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, tj. neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Teorem 7..16. *Suma stepenog reda je neprekidna funkcija na intervalu $(-R, R)$, gdje je R poluprečnik konvergencije datog reda.*

Teorem 7..17. *Suma stepenog reda na intervalu $(-R, R)$ ima konačne izvode proizvoljnog reda i oni se mogu dobiti diferenciranjem član po član.*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} \ , \ k \in \mathbb{R} \ ; \ x \in (-R, R) \ .$$

Pri tome svaki od redova dobijen diferenciranjem član po član ima poluprečnik konvergencije R.

Primjer. Poznata nam je formula za sumu geometrijskog niza

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ ,$$

pri čemu imamo ograničenje da je $|x| < 1$, a što je sada opravdano i činjenicom da je poluprečnik konvergencije ovog reda $R = 1$. Izvodjenjem iz ovog reda, lahko se dobija i sljedeća suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \ .$$

Neka sada trebamo izračunati sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$. Kako vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \ ,$$

koristeći se mogućnošću diferenciranja član po član, sada imamo

$$x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{1-x^2} \ .$$

Dakle vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{1-x^2} \ ,$$

a ovo vrijedi samo za $x \in (-1, 1)$.

Teorem 7..18. *Suma stepenog reda je ontegrabilna funkcija na svakom segmentu $[a, b] \subset (-R, R)$ i može se integraliti član po član, tj. vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \ , \ -R < a < b < R \ .$$

Red dobijen integracijom član po član ima poluprečnik konvergencije $R = 1$.

7.3. Maclaurinovi redovi

Maclaurinovi redovi
U ranijem kursu matematike, upoznali smo se sa Taylorovim polinomom i Taylorovim redom funkcije. Specijalan slučaj Taylorovog reda, za $x = 0$, predstavljao je Maclaurinov red funkcije i on je glasio

Definicija 7..19. Neka je funkcija $f(x)$ definisana na nekom intervalu koji sadrži 0 i neka postoje svi izvodi funkcije f u tački 0. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n ,$$

nazivamo Maclaurinov red funkcije f ili Maclaurinov razvoj funkcije f u okolini tačke 0.

Vidimo dakle da Maclaurinov red nije ništadrugo do stepeni red, kod koga je specijalno

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

Formalno konstruisanje Maclaurinovog reda ne obezbjedjuje njegovu konvergenciju ka datoj funkciji. Medjutim, sada sa ovom teorijom stepenih redova znamo da će to ipak biti slučaj, ali na intervalima konvergencije ovih redova.

Primjer. Poznato nam je da vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ,$$

za proizvoljno $x \in \mathbb{R}$. Tj. Maclaurinov red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira ka funkciji e^x na intervalu konvergencije, a ovaj je odredjen poluprečnikom konvergencije ovog reda $R = +\infty$. Dakle, ovaj prikaz funkcije e^x stepenim redom vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$.

Primjer. Maclaurinovi redovi funkcija $\sin$ i $\cos$ glase

$$\sin x = \sum_{n=1} \infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} ,$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Primjer. Posmatrajmo stepeni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n .$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda je $R = 1$, tj. dati red je konvergentan na intervalu $(-1, 1)$. Za $x = 1$, dobijamo alternativni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ,$$

za koga na osnovu Leibnitzovog kriterija znamo da je konvergentan red. Dakle, polazni stepeni red je konvergentan na $(-1, 1]$.

Nalaženjem izvoda funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u tački 0, pokazuje se da je Maclaurinov red ove funkcije dat upravo kao naš polazni stepeni red, pa dakle možemo zaključiti da vrijedi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ , \ x \in (-1,1] \ .$$

Sada lagano izračunavamo npr. da je

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ .$$

Još neki razvoji u stepene redove su

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \ , \ \ \alpha \notin \mathbb{N} \ , \ \ x \in (-1,1) \ .$$

Specijalno za $\alpha = -1$ i ako x zamjenimo sa x^2, imamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ .$$

Integracijom ove jednakosti u granicama od 0 do x (obrazložiti opravdanost integracije), dobijamo

$$arctg\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \ .$$

Sljedećom teoremom tvrdimo da je svaki stepeni red u stvari Maclaurinov red funkcije koja je definisana sumom stepenog reda, na intervalu konvergencije. Prema tome, jedini konvergentni stepeni redovi su Maclaurinovi redovi.

Teorem 7..20. *Neka je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ x \in (-R,R) \ .$$

Tada je

$$a_n = \frac{f_n^{(n)}(0)}{n!} \ , \ n = 0,1,2,...$$

8. Metrički prostori

8.1. Metrika i osobine

Metrički prostori

Definicija 8..1. Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ili metrička funkcija na X ako zadovoljava sljedeća četiri uslova za proizvoljne x, y i z iz X:

M1. $d(x,y) \geq 0$,

M2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako $x = y$,

M3. $d(x, y) = d(y, x)$,

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

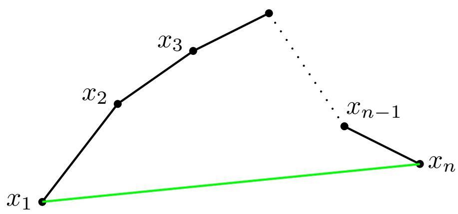
Tada kažemo da je skup X snabdjeven metrikom d i nazivamo ga metrički prostor. Elemente skupa X nazivamo tačkama, a realan broj $d(x, y)$ nazivamo rastojanjem izmedju tačaka x i y.

Dakle, metrički prostor je uredjeni par (X, d) koga čine skup X i na njemu uvedena metrika d.
Uslovi M1.-M4. nazivaju se aksiomi metrike, a pojedinačno to su *pozitivna definitnost* (M1.), *strogost* (M2.), *simetričnost* (M3.) i *nejednakost trougla* (M4.).
Osobina(M4.), tj. nejednakost trougla se može generalizovati pravilom mnogougla.

Lema 8..2. *U svakom metričkom prostoru (X, d) vrijedi pravilo mnogougla, tj. za proizvoljne $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ($n \geq 3$), vrijedi*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \ .$$

Dokaz. Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. □



Slika 5: Pravilo mnogougla

Teorem 8..3. *(Nejednakost Höldera) Neka su a_i i b_i ($i = 1, 2, ..., n$) proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je za realan broj $p > 1$, broj q definisan sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \ . \tag{13}$$

Specijalno, ako je $p = q = 2$, gornja nejednakost se naziva Cauchy-Schwarzova nejednakost.

Teorem 8..4 (Nejednakost Minkowskog)**.** *Neka su a_i i b_i ($i = 1, 2, ..., n$) proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je $p \geq 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{14}$$

Primjer. Neka je X proizvoljan skup i neka je za $x, y \in X$ zadato

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \ , \\ 1 & ; \quad x \neq y \ . \end{cases}$$

Funkcija d jeste metrika i (X, d) nazivamo diskretni metrički prostor.

Primjer. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa rastojanjem

$$d(x, y) = |x - y| \; ,$$

predstavlja dobro nam poznati Euklidov prostor realne prave.

Primjer. Sa $\mathbb{R}^n$ označavamo skup svih uredjenih n-torki realnih brojeva $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Metriku možemo uvesti sa

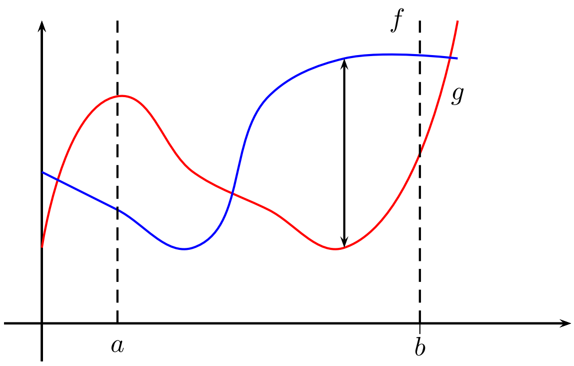
1. $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p)^{\frac{1}{p}}$ ($p \geq 1$).
3. $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

Ovim primjerom opravdavamo činjenicu da je nekada neophodno koristiti definiciju metričkog prostora kao uredjenog para, jer kao što vidimo, na istom skupu se mogu zadati različite metrike.

Primjer. Sa $C[a, b]$ označavamo skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a, b]$. Ako uvedemo funkciju

$$d(f, g) = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)| \; ,$$

za proizvoljne $f, g \in C[a, b]$, dobijamo metrički prostor neprekidnih funkcija, koga kraće uobičajeno pišemo samo sa $C[a, b]$.



Slika 6: Metrika na $C[a, b]$

Definicija 8..5. Za skup A, podskup metričkog prostora (X, d), kažemo da je ograničen ili omedjen ako je skup rastojanja medju tačkama tog skupa ograničen skup, tj.

$$(\exists C > 0)(\forall x, y \in A) \; 0 \leq d(x, y) \leq C \; .$$

Primjer. Jedinični krug $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ je ograničen skup u $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Definicija 8..6. Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Nenegativan broj

$$diam A = \sup\{d(x, y) | \; x, y \in A\} \; ,$$

nazivamo dijametrom skupa A.

Jasno je da ako vrijedi $diamA = \infty$, da je tada skup neograničen, tj. vrijedi,

Lema 8..7. *Skup je ograničen ako i samo ako mu je dijametar konačan.*

Lema 8..8. *Unija konačno mnogo ograničenih skupova je ograničen skup.*

Definicija 8..9. Neka je (X, d) metrički prostor. Za proizvoljno $a \in X$ i za proizvoljno $r > 0$ skup
$$B(a, r) = \{x \in X |\ d(a, x) < r\}\ ,$$
nazivamo otvorena kugla u X, sa centrom u tački a, poluprečnika r.
Skup
$$K(x, r) = \{x \in X |\ d(a, x) \leq r\}\ ,$$
nazivamo zatvorena kugla sa centrom u a i poluprečnika r, a skup
$$S(x, r) = \{x \in X |\ d(a, x) = r\}\ ,$$
nazivamo sfera sa centrom u a, poluprečnika r.

Lema 8..10. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Skup A je ograničen ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$, takvi da je $A \subseteq B(x, r)$.*

Definicija 8..11. Za skup G podskup metričkog prostora (X, d) kažemo da je otvoren ako vrijedi
$$(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \subseteq G\ .$$

Definicija 8..12. Skup je zatvoren ako je njegov komplement otvoren skup.

Teorem 8..13. *Neka je (X, d) metrički prostor. Kolekcija $\mathcal{T}$ svih otvorenih podskupova od X ima slijedeće osobine.*

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T}$ *onda* $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. $(\forall i \in I) O_i \in \mathcal{T}\ \Rightarrow\ \cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.
4. $(\forall x, y \in X,\ x \neq y)(\exists U, V \in \mathcal{T})(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing)$.

Familija $\mathcal{T}$ koja zadovoljava osobine 1., 2. i 3. naziva se topologija na X, a ako zadovoljava još i osobinu 4., naziva se Hausdorffova topologija na X.

Definicija 8..14. Za skup A, podskup metričkog prostora (X, d), kažemo da je okolina tačke $x \in X$, ako postoji otvoren skup O, takav da je
$$x \in O \subseteq A\ .$$

Uobičajeno u gornjoj definiciji umjesto bilo kog otvorenog skupa, zahtjevamo postojanje neke kugle, tako da je
$$x \in B(x, \varepsilon) \subseteq A\ .$$

Tako na realnoj pravoj, za skup A kažemo da je okolina tačke x, ako postoji $\varepsilon > 0$, takav da je
$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A\ .$$

Definicija 8..15. Neka je (X, d) metrički prostor. Tačku $x \in A \subseteq X$ nazivamo izolovanom tačkom skupa A, ako postoji okolina tačke x u kojoj osim tačke x nema drugih tačaka iz skupa A.

Definicija 8..16. Tačka $x \in A$ je tačka nagomilavanja skupa A, ako se u svakoj okolini tačke x nalazi bar jedna tačka skupa A različita od x. Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A nazivamo izvodni skup i označavamo ga sa A'.

Ako skup sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, on je onda zatvoren skup. Inače, ako skupu A "dodamo" sve njegove tačke nagomilavanja, dobijamo novi skup koga nazivamo adherencija ili zatvorenje skupa, a označavamo ga sa $\overline{A}$. Pri tome dakle vrijedi

$$\overline{A} = A \cup A' \ .$$

8.2. Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija u metričkim prostorima

Definicija 8..17. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ kažemo da konvergira ka $x_0 \in X$, ako vrijedi

$$d(x_n, x_0) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Činjenicu da niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka tački x_0 uobičajeno zapisujemo sa $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ili

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ .$$

Gore definisanu konvergenciju nazivamo *konvergencija po metrici*.

Teorem 8..18. *U metričkom prostoru, konvergentan niz može konvergirati samo jednoj tački.*

Teorem 8..19. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Definicija 8..20. Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ kažemo da je Cauchyjev niz ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \ \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ .$$

Drugačije rečeno, niz je Cauchyjev ako vrijedi

$$\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0 \ .$$

Teorem 8..21. *Svaki Cauchyjev niz je ograničen.*

Teorem 8..22. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Definicija 8..23. Za metrički prostor u kome je svaki Cauchyjev niz konvergentan kažemo da je kompletan ili potpun metrički prostor.

Teorem 8..24. *Metrički prostor (X, d) je kompletan ako i samo ako presjek proizvoljnog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli, čiji niz dijametara teži ka 0, sadrži tačno jednu tačku.*

8.3. Kompaktnost u metričkim prostorima

Kompaktnost u metričkim prostorima

Definicija 8..25. Neka je M podskup metričkog prostora X. Za skup M kažemo da je relativno kompaktan ako se iz svakog niza u M može izdvojiti konvergentan podniz, tj.

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}})\ x_{n_k} \to x_0\ ,\ (k\to\infty)\ ,\ x_0 \in X\ .$$

Ako je pri tome $x_0 \in M$, kažemo da je M kompaktan skup.

Teorem 8..26. *Svaki kompaktan metrički prostor je i kompletan.*

Teorem 8..27. *Svaki kompaktan skup je zatvoren.*

Teorem 8..28. *Svaki relativno kompaktan skup je ograničen.*

Na osnovu Teorema 8..27 i Teorema 8..28, vidimo da u proizvoljnom metričkom prostoru kompaktnost skupa imlicira njegovu ograničenost i zatvorenost.
U opštem slučaju, ograničenost i zatvorenost skupa ne dovode do njegove kompaktnosti, ali u nekim specijalnim slučajevima do toga ipak dolazi.

Teorem 8..29. *U svakom konačno dimenzionalnom metričkom prostoru vrijedi, ako je skup ograničen i zatvoren, onda je on kompaktan.*

Definicija 8..30. Neka su M i N podskupovi metričkog prostora X. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran realan broj. Za skup N kažemo da je ε-mreža skupa M ako za svako $x \in M$, postoji $y \in N$, tako da je $d(x,y) < \varepsilon$. Ako je N kompaktan skup, kažemo da je N kompaktna ε-mreža, a ako je konačan skup, kažemo da je konačna ε-mreža.

Lema 8..31. *Skup N je ε-mreža ($\varepsilon > 0$) skupa M ako i samo ako vrijedi*

$$M \subseteq \bigcup_{x\in N} B(x,\varepsilon)\ .$$

Teorem 8..32. *Potreban uslov za relativnu kompaktnost skupa $M \subseteq X$ jeste da za svako $\varepsilon > 0$, postoji konačna ε-mreža skupa M. Ako je metrički prostor X kompletan, gornji uslov je i dovoljan.*

Neprekidne funkcije u metričkim prostorima

Definicija 8..33. Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in X)(d_X(x_0,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0),f(x)) < \varepsilon)\ .$$

Preslikavanje je neprekidno na X ako je neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

Teorem 8..34. *Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori i $f : X \to Y$. Sljedeća tvrdjenja su ekvivalentna.*

1. *f je neprekidna na X.*
2. $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$.
3. *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X.*

Teorem 8..35. *Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je ograničena i dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost.*

Teorem 8..36. *Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je i uniformno neprekidna.*

9. Normirani prostori

9.1. Definicija i osobine

Normirani prostori

Definicija 9..1. Neka je X linearan vektorski prostor, na kome je definisana funkcija $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sa sljedećim osobinama

1. $(\forall x \in X)\ \|x\| \geq 0$.
2. Ako je $\|x\| = 0$, onda je $x = 0$.
3. $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X)\ \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$.
4. $(\forall x, y \in X)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada za funkciju $\|\cdot\|$ kažemo da je norma na X, a za X kažemo da je normiran linearan vektorski prostor.

Lema 9..2. *Neka je X normiran linearan vektorski prostor. Tada za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi*
$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|\ .$$

Dokaz. Neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Iz relacije trougla imamo

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|\ ,$$

odnosno,
$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\ . \tag{15}$$

Prostom zamjenom uloga x i y, dobijamo

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|\ ,$$

ili
$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|\ . \tag{16}$$

Iz (15) i (16) dobijamo traženu nejednakost. □

Definišimo sada pomoću norme, funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, na sljedeći način

$$d(x, y) = \|x - y\|\ \ ,\ \ x, y \in X\ .$$

Nije teško provjeriti da ovako definisana funkcija zadovoljava sve uslove Definicije 8..1, pa je na ovaj način uvedena metrika na X, za koju kažemo da je inducirana normom u datom prostoru.
Samim tim imamo da je svaki normiran linearan vektorski prostor ujedno i metrički prostor, te sve što je rečeno za metričke prostore vrijedi i za normirane prostore.

9.2. Euklidovi prostori

Euklidovi prostori

Ranije smo definisali pojam uredjene n-torke. Descartesov proizvod skupova X_i ($i = 1, 2, ..., n$) smo obilježavali sa

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \; x_i \in X_i, \; i = 1, 2, ..., n\} \; .$$

Specijalno, ako uzmemo da je $X_i = \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, ..., n$), koristimo kraću oznaku

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \; x_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, ..., n\} \; .$$

Za dvije tačke $X, Y \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su jednake ako su im jednake odgovarajuće koordinate i pišemo $X = Y$. U suprotnom su tačke različite, $X \neq Y$. Neka su na $\mathbb{R}^n$ definisane sljedeće funkcije: za $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$

$$d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;\; ; \; d_\infty(X, Y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \; .$$

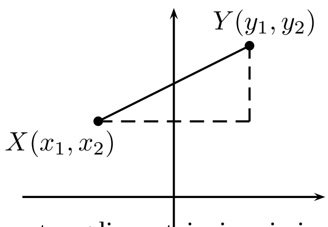
Obje funkcije zadovoljavaju osobine metrike, pa su one metrike na $\mathbb{R}^n$ i tada prostor $\mathbb{R}^n$ sa jednom od tih metrika nazivamo n-dimenzionalni euklidski prostor. Za $n = 1$ imamo 1-dimenzionalni euklidski prostor (realna prava) u kome rastojanje izmedju dvije tačke mjerimo sa

$$d(x, y) = |x - y| \; .$$

Za $n = 2$ imamo 2-dimenzionalni euklidski prostor koga geometrijski interpretiramo kao realnu ravan, u kome rastojanje računamo sa npr.

$$d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \; .$$

Za $n = 3$ imamo 3-dimenzionalni euklidski prostor koga geometrijski interpretiramo



kao uobičajeni realni prostor gdje rastojanje mjerimo metrikom d_2. Pri tome je za $X(x_1, y_1, z_1)$ i $Y(x_2, y_2, z_2)$ iz $\mathbb{R}^3$,

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \; .$$

Definicija 9..3. Uredjena n-torka realnih brojeva $x_1, x_2, ..., x_n$ naziva se tačkom n-dimenzionalnog realnog prostora i označavamo je sa $X = X(x_1, x_2, ..., x_n)$. Realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ nazivamo koordinatama tačke X.

Za realan niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, poznat nam je Cauchyjev kriterij konvergencije, tj. dati niz je konvergentan ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon) \; .$$

U kontekstu Definicije 8..20, to znači de je dati niz Cauchyjev, a ovo opet znači da je $\mathbb{R}$ kompletan metrički prostor. Šta više, vrijedi

Teorem 9..4. *Svaki konačnodimenzionalan normiran prostor je kompletan.*

Definišimo na $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ funkciju $||\cdot||$, koja će svakom elementu iz $\mathbb{R}^n$ pridružiti nenegativan broj, na sljedeći način

$$||X|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \ ,\ X(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ . \qquad (17)$$

Nije teško provjeriti da ovako uvedena funkcija zadovoljava sve osobine iz Definicije 9..1, pa ona predstavlja normu na linearnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Jasno, normu na $\mathbb{R}^n$ smo mogli uvesti i na neki drugi način, a zašto smo baš ovako, odgovor leži u sljedećem. Pomoću norme sada možemo definisati rastojanje na $\mathbb{R}^n$, a ono je za ovu normu dato sa

$$d(X,Y) = ||X - Y|| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

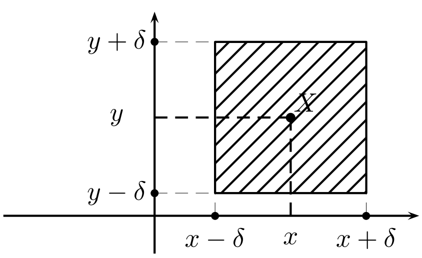
gdje su $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ i $Y(y_1, y_2, ..., y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$. Uočimo da je indukovana metrika normom (17), upravo euklidska metrika d_2.
Nije teško primjetiti da norma tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$, nije ništa drugo do udaljenost te tačke od koordinatnog početka, odnosno to je intenzitet radijus vektora te tačke.

9.3. Specijalni skupovi u Euklidskim prostorima

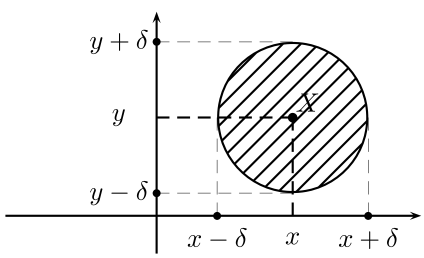
Specijalni skupovi u Euklidskim prostorima
U Euklidskim prostorima otvorena kugla je otvoren skup, a zatvorena kugla je zatvoren skup. Šta više, na osnovu Teorema 8..13, otvoreni skupovi su i proizvoljnie unije otvorenih kugli i konačni presjeci otvorenih kugli. Tako su na realnoj prevoj, intervali (a, b) $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ otvoreni skupovi, a pokazuje se da je skup otvoren ako i samo ako se može prikazati kao unija intervala.
Zbog svega navedenog, od interesa je opisati neke specijalne skupove, a to su otvorene i zatvorene kugle. Definicijom 8..9 smo uveli pojmove otvorene i zatvorene kugle kao i sfere, u bilo kom metričkom prostoru. U jednodimenzionalnom euklidskom prostoru, otvorena kugla je simetrični interval

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} \ .$$

Ako u prostoru $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ izaberemo metriku d_2, pojmovi kugle i sfere poklapaju se sa uobičajenim shvatanjem tih pojmova. Ako izaberemo metriku d_∞, onda ulogu kugle i sfere imaju, u običnom govoru korišteni termini za kvadrat i kocku.



Kugla u $\mathbb{R}^2$ sa metrikom d_∞



Kugla u $\mathbb{R}^2$ sa metrikom d_2

U

metričkom prostoru $\mathbb{R}^2$ sa metrikom d_2, kugle su predstavljene kružnicama, a to znači da će otvorena kugla sa centrom u tački $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ i poluprečnikom $r > 0$ biti skup

$$B((p,q),r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-p)^2 + (y-q)^2 < r\right\} \ ,$$

a ista takva ali zatvoren kugla bit će

$$K((p,q),r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x-p)^2 + (y-q)^2 \leq r\right\} \ .$$

Sa metrikom d_∞, kugle su kvadrati sa stranicama paralelnim koordinatnim osama, pa će otvorena kugla centra $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, poluprečnika $r > 0$, biti skup

$$B((a,b),r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x-a| < r, |y-b| < r\right\} \ ,$$

a zatvorena kuglu je

$$K((a.b),r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |x-a| \leq r, |y-b| \leq r\right\} \ .$$

Pod okolinom tačke $X \in \mathbb{R}^n$ podrazumijevamo proizvoljnu otvorenu kuglu u $\mathbb{R}^n$ sa centrom u tački X. Sa metrikom d_2, za okolinu kažemo da je sferna, a sa metrikom d_∞, za okolinu kažemo da je kubna okolina.
Sada kada znamo šta su kugle u prostoru $\mathbb{R}^n$, možemo precizirati i značenje ograničenog skupa, na osnovu Leme 8..10 . Dakle, skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je ograničen, ako postoji $r > 0$, takav da je D kompletno sadržan u otvorenoj kugli $B(O,r)$, $D \subseteq B(O,r)$. (O je tačka koordinatnog početka)

10. Pojam funkcije više promjenljivih

Neka su $S_X \subset \mathbb{R}^n$ i $S_Y \subset \mathbb{R}^m$ proizvoljni skupovi.

Definicija 10..1. Ako jednoj tački $X \in S_X$ po nekom zakonu ili pravilu f dodijeljujemo tačno jednu tačku $Y \in S_Y$, kažemo da je sa f definisano preslikavanje ili funkcija sa S_X u S_Y.

Definicija 10..2. Pod realnom funkcijom n promjenljivih podrazumijevamo svako preslikavanje $f : S_X \to \mathbb{R}$, gdje je $S_X \subset \mathbb{R}^n$. Pri tome za proizvoljno $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in S_X$ pišemo

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = y \ \text{ ili } f(X) = y \ .$$

Kako uredjena n-torka označava tačku u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru, to ćemo često funkciju f zvati funkcija tačke.
Skup S_X nazivamo domenom funkcije f, a realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ nazivamo nezavisne varijable, argumenti ili promjenljive funkcije f.

Primjer. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$; $f : S_X \to \mathbb{R}$, x i y su varijable, a domen je $S_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

Ovdje ćemo izučavati funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tj. funkcije koje kao ulaz imaju vektor, a kao izlaz daju skalar.
Funkcija koja svakoj tački trodimenzionalnog prostora dodjeljuje temperaturu u toj tački, primjer je takve funkcije, ili funkcija koja prikazuje bruto nacionalni dohodak neke države. U prvom slučaju, domen funkcije je trodimenzionalan, dok je u drugom slučaju on višedimenzionalana (npr. hiljadu). Bez obzira što ćemo mi govoriti o

proizvoljnom n-dimenzionalnom prostoru, naši primjeri će najčešće biti u dvije ili tri dimenzije.
U grafičkom predstavljanju funkcija više varijabli, uobičajena su dva načina, pomoću nivo linija i pomoću grafa.

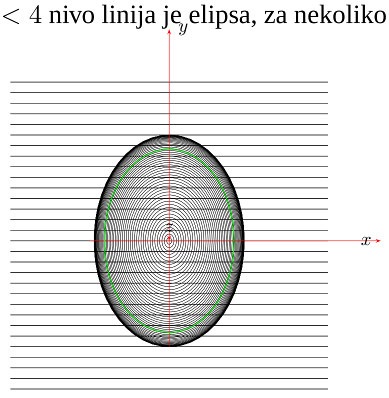
Definicija 10..3. Za datu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i realan broj c, skup

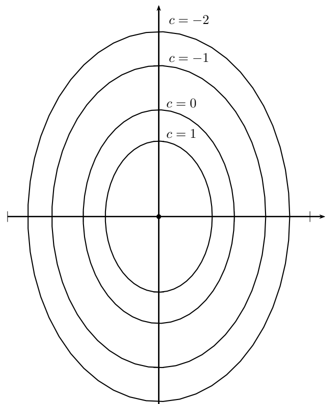
$$L = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n |\ f(x_1, x_2, ..., x_n) = c\}$$

nazivamo nivo skup funkcije f za nivo c. Za $n = 2$, L nazivamo nivo kriva funkcije f, a za $n = 3$, kažemo da je L nivo površ funkcije f. Crtanje koje prikazuje nivo skupove za različite nivoe nazivamo konturno crtanje funkcije.

Naprimjer, kod funkcije dvije promjenljive $z = f(x, y)$, držeći z fiksnim, tj. stavljajući $f(x, y) = c$, vršimo presjecanje površi $f(x, y)$ sa ravni $z = c$. Presječnu liniju te ravni i površi, projektujemo u xOy ravan ili gledamo iz tačke na z-osi. Radeći taj postupak za razne c, dobijamo konturnu sliku grafa.

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$. Za zadato $c \in \mathbb{R}$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednakost $4 - 2x^2 - y^2 = c$ predstavlja nivo skup funkcije f. Jasno, ako je $c > 4$, taj skup je prazan; za $c = 4$ on se sastoji samo od jedne tačke, $(0, 0)$; za $c < 4$ taj skup je elipsa sa centrom u koordinatnom početku, tj. za svako $c < 4$ nivo linija je elipsa, za nekoliko različitih nivoa.





Slika 7: (lijevo) Slika **??**, pogled sa z-ose, (desno) nivo linije funkcije $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$

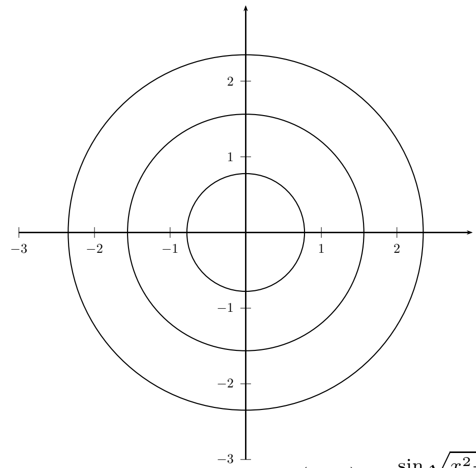
Primjer. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa

$$f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Za proizvoljnu tačku (x, y) na centralnoj kružnici poluprečnika $r > 0$ ($x^2 + y^2 = r^2$), funkcija $f(x, y)$ ima konstantnu vrijednost

$$\frac{\sin r}{r} ,$$

pa će nivo linije ove funkcije, biti koncentrični krugovi sa centrom u koordinatnom početku.



Slika 8: Nivo linije funkcije $f(x, y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Primjer nivo linija imamo u kartografiji. Naime, kada na karti, koja je dvodimenzionalni prikaz terena, želimo prikazati planinu, onda to upravo činimo prikazom punom linijom onih tačaka te planine koje su na istoj nadmorskoj visini. Takodje imamo izobare (područja sa istim pritiskom), izoterme (područja sa istom temperaturom)

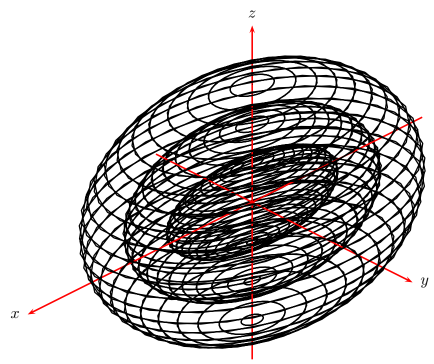
Primjer. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Jedna nivo površ ove funkcije zadata je jednačinom

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 ,$$

što predstavlja jednačinu elipsoida. Primjetimo da ako u gornjoj jednačini fiksiramo $z = z_0$, dobijamo jednačinu

$$x^2 + 2y^2 = 1 - 3z_0^2 ,$$

a to su elipse u xy-ravni, što opravdava činjenicu da su nivo površi funkcije f elipsoidi (slično smo mogli fiksirati i varijable x i y i dobiti da su projekcije u yz-ravan i u xz-ravan takodje elipse).



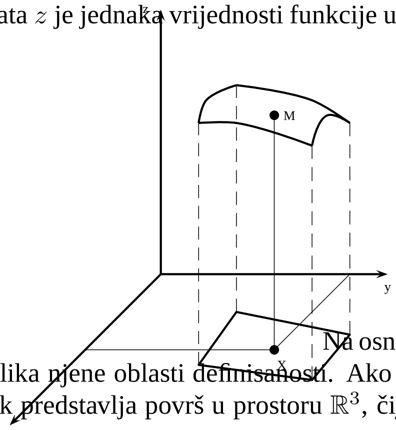
Slika 9: Nivo površi funkcije $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ (elipsoidi)

Kod proučavanja funkcije jedne promjenljive, $y = f(x)$, svakom smo paru (x, y) pridruživali jednu tačku $M(x, y)$ u realnoj ravni. Skup svih takvih tačaka M, predstavljao je grafik funkcije f i on je bio izražen kao kriva linija u ravni.

U slučaju kada posmatramo funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, grafik funkcije će biti izražen tačkama $M(x, y, z)$, dakle u 3-dimenzionalnom prostoru. Pri tome vrijedi

1° Svaka tačka grafika, $M(x, y, z)$, ima apscisu (po x-osi) i ordinatu (po y-osi) koje predstavljaju koordinate neke tačke $X(x, y)$ iz domena funkcije, i aplikatu (po z-osi) koja je jednaka vrijednosti funkcije u tački $X(x, y)$.

2° Svaka tačka $M(x, y, z)$ prostora za koju tačka $X(x, y)$ pripada domenu funkcije, a aplikata z je jednaka vrijednosti funkcije u tački X, pripada grafiku funkcije



Na osnovu rečenog zaključujemo da je grafik funkcije slika njene oblasti definisanosti. Ako je $z = f(x, y)$ definisana u oblasti D, njen grafik predstavlja površ u prostoru $\mathbb{R}^3$, čija je projekcija na xy-ravan upravo oblast D.

Definicija 10..4. Posmatrajmo proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Skup

$$G = \{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})|\; x_{n+1} = f(x_1, x_2, ..., x_n)\}$$

nazivamo graf funkcije f.

Primjetimo da je graf G funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, pa kao posljedicu toga imamo da smo u mogućnosti geometrijski predstavljati samo slučajeve kada je $n = 1$ i tada imamo krivu koja predstavlja funkciju jedne varijable, i kada je $n = 2$ u kom slučaju je graf površ u trodimenzionalnom prostoru.
Šta bi bila geometrijska interpretacija grafika funkcije 3 i više promjenljivih za sada nam je nemoguće reći, s obzirom da nemamo način da prikažemo uredjene četvorke, petorke itd.

Primjer. Graf funkcije $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, prestavlja skup uredjenih trojki $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, koje zadovoljavaju jednakost

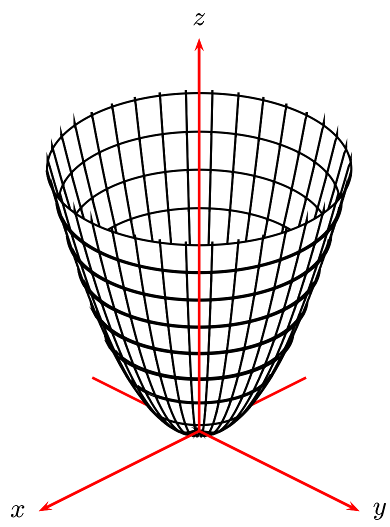
$$z = 2x^2 + y^2 \; .$$

Da bi smo predstavili graf ove funkcije u $\mathbb{R}^3$, koristimo ideju da predstavljamo dijelove tog grafa koji leže iznad mreže linija paralelnih osama u xy-ravni. Npr., za jedno fiksirano $x = x_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu

$$z = 2x_0^2 + y^2 \; ,$$

predstavlja parabolu koja leži iznad linije $x = x_0$ u xy-ravni.

Na isti način, ako fiksiramo $y = y_0$, skup tačaka koje zadovoljavaju jednačinu $z = 2x^2 + y_0^2$, je parabola koja leži iznad linije $y = y_0$. Ako istovremeno nacrtamo više tih parabola za razne $x = x_0$ i $y = y_0$, dobijamo mrežnu predstavu te površi (grafa) i u ovom slučaju ta površ je paraboloid.



Slika 10: Paraboloid; Graf funkcije $z = 2x^2 + y^2$

Primjer. Mada se za grafove mnogih funkcija možemo poslužiti idejom mreže, izloženom u gornjem primjeru, za većinu funkcija dobra slika njihovih grafova zahtjeva upotrebu računarske grafike ili eventualno mnogo umjetničke vještine. Tako naprimjer, za predstavljanje grafa funkcije

$$f(x,y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ,$$

možemo se poslužiti konturnim crtanjem i zaključiti da graf funkcije osciluje ukoliko se pomjeramo od koordinatnog početka, tačnije, da nivo krugovi iz konturnog crtanja rastu i opadaju sa oscilacijom $\frac{\sin r}{r}$, gdje je $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

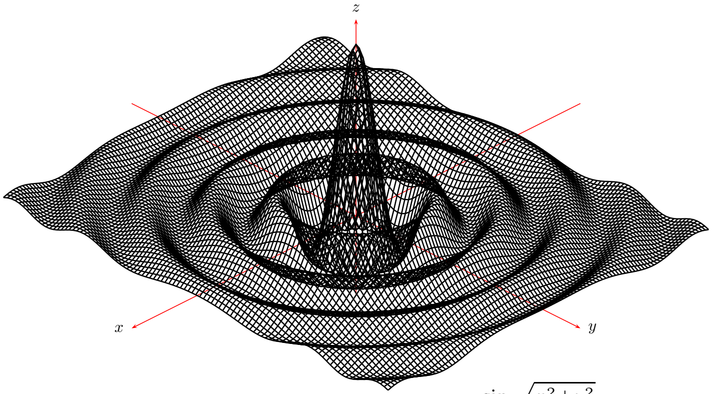
Ekvivalentno, dijelovi grafa funkcije f iznad proizvoljne linije u xy-ravni koja prolazi kroz koordinatni početak, predstavljeni su funkcijom

$$z = \frac{\sin r}{r} \ .$$

Ovo zaista jeste dobra ideja za predstavljanje grafa funkcije f, ali iskreno govoreći mnogi ne bi bili u stanju produkovati sliku tog grafa. Primjetimo takodje da naša funkcija nije definisana u tački $(0,0)$ ali da ona teži ka vrijednosti 1, kada tačka (x,y) teži ka $(0,0)$, što je opravdano činjenicom

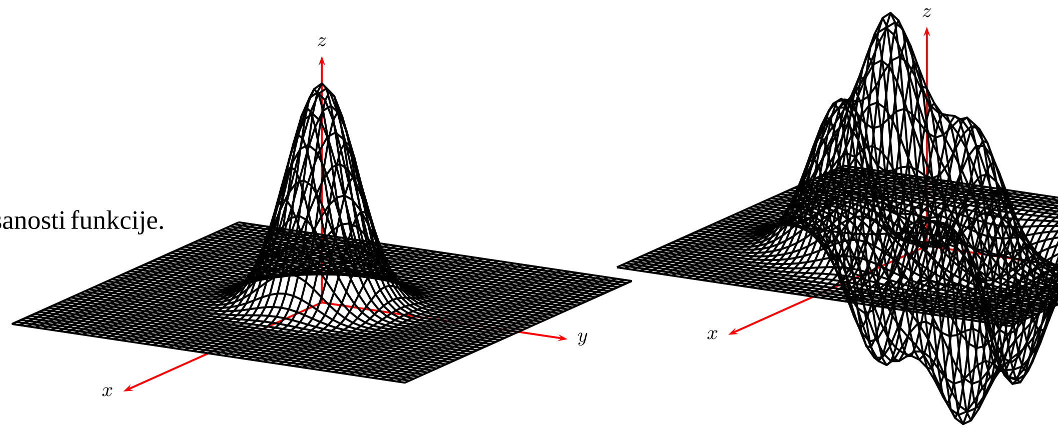
$$\lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1 \ .$$

Ovdje treba otkloniti i nedoumicu oko funkcija oblika $z = \sin x$ (Slika 12 lijevo) ili $z = y^2$ (Slika 12 desno). Naime, u oba slučaja podrazumijevamo da je $z = z(x,y)$ pa grafici predstavljaju površi u prostoru, a nepojavljivanje neke od varijabli znači njenu pro-



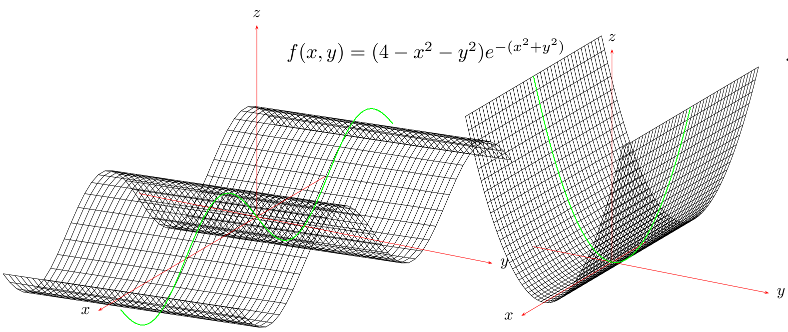
Slika 11: Graf funkcije $f(x,y) = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

izvoljnost u definisanosti funkcije.



$f(x,y) = (4 - x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

$f(x,y) = 10\left(x^3 + xy^4 - \frac{x}{5}\right)e^{-(x^2+y^2)} + e^{-((x-1.22$



Slika 12: (lijevo) $z = \sin x$, (desno) $z = y^2$

11. Granična vrijednost funkcije više promjenljivih i neprekidnost

11.1. Pojam granične vrijednosti

Neka je data funkcija n promjenljivih,

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

i neka je $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tačka domena funkcije f. Dalje, sa U_A označimo proizvoljnu okolinu tačke A i neka je $L \in \mathbb{R}$ i U_L okolina tačke L.

Definicija 11..1. Funkcija n nezavisnih projenljivih, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$, ima u tački A graničnu vrijednost jednaku L, ako vrijedi

1° Tačka A je tačka nagomilavanja domena funkcije f,

2° za proizvoljnu okolinu U_L, postoji okolina U_A, tako da se vrijednost funkcije $f(X)$ nalazi u okolini U_L za svaku tačku $X \neq A$ koja se nalazi u U_A.

Činjenicu da funkcija f ima u tački A graničnu vrijednost jednaku L, simbolički zapisujemo sa

$$\lim_{X \to A} f(X) = \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,..,a_n)} = \lim_{x_1\to a_1,...,x_n\to a_n} f(x_1, x_2, ..., x_n) = L \ .$$

Napomenimo da sama tačka A ne mora pripadati domenu funkcije f. Ako se za okoline U_A i U_L koriste sferne okoline, onda gornju definiciju možemo iskazati

Definicija 11..2. Funkcija f u tački A ima graničnu vrijednost jednaku L ako vrijedi,

1° tačka A je tačka nagomilavanja domena funkcije f,

2° za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve $X \neq A$ za koje je

$$0 < d(X, A) < \delta \ \Leftrightarrow \ \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta \ ,$$

vrijedi

$$|f(X) - L| < \varepsilon \ .$$

Ukoliko koristimo kubne okoline Definicija 11..1 ima oblik

Definicija 11..3. Funkcija f u tački A ima graničnu vrijednost jednaku L ako vrijedi,

1° tačka A je tačka nagomilavanja domena funkcije f,

2° za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve $X \neq A$ za koje je

$$0 < |x_i - a_i| < \delta, i = 1, 2, ..., n \ ,$$

vrijedi

$$|f(X) - L| < \varepsilon \ .$$

Posmatrajmo neke slučajeve graničnog procesa za funkciju dvije promjenljive. Na primjer, slučaj

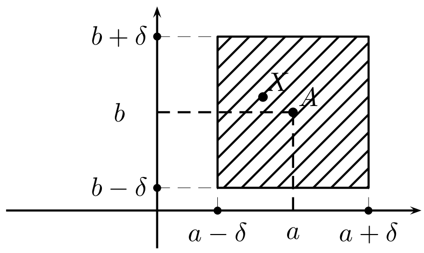
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L\ ,$$

tumačimo na sljedeći način:
Ako fiksiramo $\varepsilon > 0$, onda postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da važi

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon\ ,$$

kad god su x i y takvi da važi $|x-a| < \delta$ i $|y-b| < \delta$ (ili $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$).

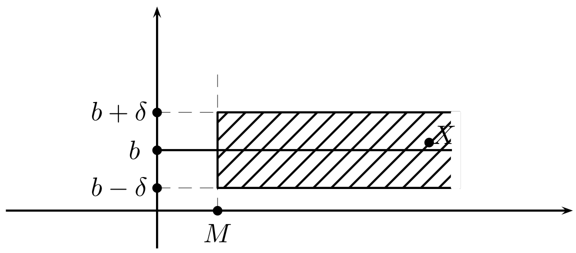
Pri tome je okolina tačke $A(a,b)$, u zavisnosti od metrike data na slici



Granični proces

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to b}} f(x,y) = L\ ,$$

tumačimo na sljedeći način: Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ i $M(\varepsilon) > 0$ takvi da važi $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, kad god su x i y takvi da je $x > M$ i $|y-b| < \delta$. Pri tome je okolina tačke A beskonačni pravougaoni pojas prikazan na slici



Teorem 11..4. *Neka su* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i neka postoje*

$$\lim_{X\to A} f(X) = F \ \ i \ \ \lim_{X\to A} g(X) = G\ .$$

Tada postoje i granične vrijednosti funkcija $f(X) \pm g(X)$, $f(X)\cdot g(X)$, $\frac{f(X)}{g(X)}$ *(*$g(X) \neq 0$*) i* $kf(X)$ *(*$k \in \mathbb{R}$*) i pri tome vrijedi*

$$\lim_{X\to A} (f(X) \pm g(X)) = F \pm G\ ,$$

$$\lim_{X\to A} (f(X)g(X)) = F \cdot G\ ,$$

$$\lim_{X\to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{F}{G}\ ,$$

$$\lim_{X\to A} kf(X) = kF\ .$$

Teorem 11..5. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka postoji*

$$\lim_{X\to A} f(X) = F\ .$$

Tada za proizvoljan niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $X_n \to A$ ($n \to \infty$), vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = F\ .$$

Rezultat gornje teoreme koristimo sada u kompoziciji funkcija.

Teorem 11..6. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ako postoji granična vrijednost*

$$\lim_{X\to A} f(X) = F$$

i ako je h neprekidna funkcija, tada vrijedi

$$\lim_{X\to A} h(f(X)) = h(F)\ .$$

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadata sa

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k\ ,\ \ k \in \{1, 2, ..., n\}\ .$$

Ukoliko sada posmatramo granični proces kada $X \to A$, tj. $X(x_1, x_2, ..., x_n) \to A(a_1, a_2, ..., a_n)$, što u stvari znači da za proizvoljno $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi

$$x_i \to a_i\ ,$$

tada imamo

$$\lim_{X\to A} f(x_1, x_2, ...x_n) = \lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)} x_k = a_k\ .$$

Specijalno, ako posmatramo funkciju $f(x, y) = x$, onda imamo

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a\ .$$

Primjer. Neka je sada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadata sa $f(x, y, z) = xyz$. Koristeći Teorem 11..4 i gornji primjer, imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) &= \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} xyz \\
&= \left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x\right)\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y\right)\left(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z\right) \\
&= abc\ .
\end{aligned}$$

Dakle, ako imamo da je $A(1, 2, 1)$, tada je

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,1)} xyz = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2\ .$$

Primjer. Kombinujući prethodno, sada računamo

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(-1,2)}(x^2+y^2-3xy+2x) = (&\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)+\\ &(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y)(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y)-\\ &3(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y)\\ &2(\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x)\\ &= (-1)(-1)+2\cdot 2-3(-1)2+2(-1)=9.\end{aligned}$$

Sva tri gornja primjera predstavljaju primjere polinomijalnih funkcija više varijabli. Generalno, funkciju $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, oblika

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=cx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\ ,$$

gdje je c skalar, a k_i ($i=1,2,...,n$) nenegativni cijeli brojevi, nazivamo *monomom*. Funkciju koja predstavlja sumu monoma nazivamo *polinomijalna funkcija*.

Primjer. Koristeći Teorem 11..6 i gornje razmatranje za polinomijalne funkcije, lagano računamo i granične procese složenijih funkcija.
Neka je $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, zadata sa

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2}\ .$$

Kako je korjena funkcija neprekidna, sada imamo

$$\begin{aligned}&\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)} f(x_1,x_2,...,x_n)=\\ &\sqrt{\lim_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)}(x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2)}\\ &=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}.\end{aligned}$$

Ili

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{(x^3-y^2+3x^2y)} &= e^{(\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^3-y^2+3x^2y))}\\ &= e^3\ .\end{aligned}$$

U oba primjera podrazumijevamo da je tačka A iz domena funkcije f.

Pored polinomijalnih, često su u upotrebi i funkcije oblika

$$f(X)=\frac{g(X)}{h(X)}\ ,$$

gdje su g i h polinomijalne funkcije. Funkciju f nazivamo *racionalna funkcija*. I ovdje, ukoliko je tačka konvergencije A iz domena funkcije, granični proces računamo jednostavno. Naime,

$$\lim_{X\to A} f(X)=\frac{\lim_{X\to A} g(X)}{\lim_{X\to A} h(X)}\ .$$

Primjer. Neka je $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y+5xyz}{2x^2+3z^2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} f(x,y,z) &= \lim_{(x,y,z)\to(1,-1,2)} \frac{x^2y+5xyz}{2x^2+3z^2}\\ &= \frac{1^2(-1)+5\cdot 1\cdot(-1)\cdot 2}{2\cdot 1^2+3\cdot 2^2}\\ &= \frac{-6}{14}=-\frac{3}{7}\ .\end{aligned}$$

Primjer.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)} \ln\left(\frac{xy}{2x^2+y^2}\right) &= \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy}{2x^2+y^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2}{6}\right)=-\ln 3\ .\end{aligned}$$

Napomenimo još jednom bitnost pretpostavke da je granična tačka u svim gornjim primjerima graničnih procesa, bila tačka oblasti definisanosti posmatrane funkcije. Medjutim, u definiciji granične vrijednosti funkcije više varijabli, zahtjevalimo smo u 1. da je A tačka nagomilavanja domena funkcije, što znači da granične vrijednosti možemo računati i u nekim "drugim" tačkama. Tako naprimjer, za funkciju

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\ ,$$

tačka $A(0,0)$ nije iz domena, ali jeste tačka nagomilavanja domena funkcije. Iako je naša funkcija racionalna, ne bismo mogli primjeniti raniji postupak izračunavanja limesa ove funkcije u tački A jer bi to dovelo do neodredjenog oblika $\frac{0}{0}$. Ipak, ako izaberemo tačku X dovoljno blisku tački A, tj. neka je

$$0<d(X,A)=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon\ ,$$

za proizvoljno $\varepsilon>0$, tada ćemo imati

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|}\leq\frac{d(X,A)^2d(X,A)}{d(X,A)^2}=d(X,A)<\varepsilon\ .$$

Ovo na osnovu Definicije 11..2 znači da vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\ .$$

11.2. Simultana i uzastopna granična vrijednost

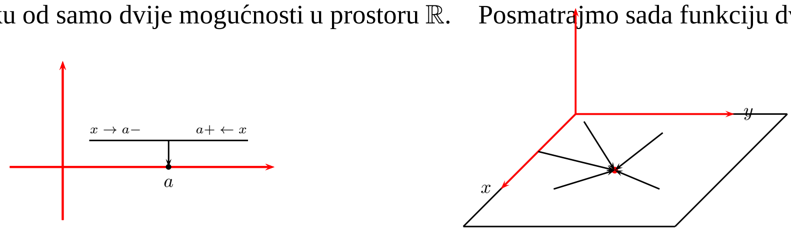
Prisjetimo se da smo za funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, postojanje granične vrijednosti

$$\lim_{x\to a} f(x)=L\ ,$$

opravdavali postojanjem i jednakošću lijeve i desne granične vrijednosti u tački a, tj. uslovom

$$\lim_{x\to a-} f(x)=L=\lim_{x\to a+} f(x)\ .$$

Ukoliko jedna od ovih graničnih vrijednosti u tački a ne postoji, tada ne postoji ni granična vrijednost funkcije u toj tački. Slično razmišljanje možemo primjeniti i za funkciju više varijabli, ali razlika leži u činjenici što će sada postojati beskonačno mnogo krivih po kojima se tačka X može približavati nekoj tački A u prostoru $\mathbb{R}^n$, za razliku od samo dvije mogućnosti u prostoru $\mathbb{R}$. Posmatrajmo sada funkciju dvije

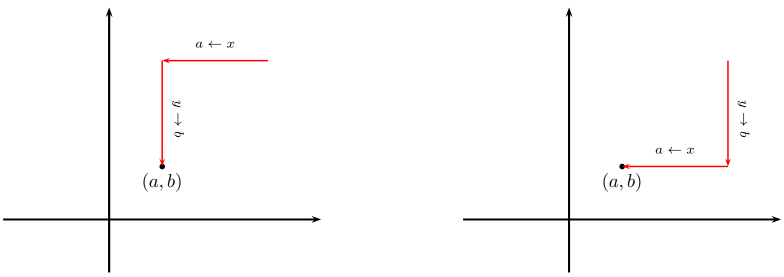


Slika 13: Prilaz tački na pravoj (lijevo)i u ravni (desno)

promjenljive $f(x, y)$. Graničnu vrijednost L, definisanu u Definiciji 11..1, nazivamo *simultana granična vrijednost* funkcije $f(x, y)$. Pored ove, od interesa je posmatrati još dvije granične vrijednosti, a to su

$$L_{12} = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) \ , \ L_{21} = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) \ ,$$

koje nazivamo *uzastopne granične vrijednosti* (slika 14). Veza simultane i uzastopnih



Slika 14: Uzastopni limesi: (lijevo) $L_{12} = \lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b}$, (desno) $L_{21} = \lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a}$

graničnih vrijednosti data je sa

Teorem 11..7. *Ako postoji simultana granična vrijednost*

$$L = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$$

i ako za svako y postoji granična vrijednost

$$\lim_{x \to a} f(x, y) \ ,$$

tada postoji i uzastopna granična vrijednost

$$L_{21} = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) \ ,$$

i vrijedi

$$L = L_{21} \ .$$

Formulaciju gornje teoreme možemo iskazati koristeći i graničnu vrijednost L_{12}. Posljedice ove teoreme su:

1) Ako postoje simultana i uzastopne granične vrijednosti tada vrijedi

$$L = L_{12} = L_{21} \ .$$

2) Ako je $L_{12} \neq L_{21}$, onda simultana granična vrijednost L ne postoji.

Primjer. Posmatrajmo funkciju $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ u tački $O(0,0)$.

$$L_{12} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1 \ .$$

$$L_{21} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1 \ .$$

$L_{12} \neq L_{21}$ pa dakle L ne postoji.

Primjer. $f(x,y) = x\cos y$, $x \to 0$ i $y \to +\infty$. Zbog ograničenosti funkcije kosinus vrijedi

$$L = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to +\infty}} x\cos y = 0 \ .$$

$$L_{21} = \lim_{y\to +\infty}\lim_{x\to 0} x\cos y = 0 \ .$$

L_{12} ne postoji jer ne postoji granična vrijednost funkcije $\cos y$ kada $y \to +\infty$.

Primjer. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x \to 0$ i $y \to 0$.

$$L_{12} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = L_{21} \ .$$

Simultani limes ne postoji! Zaista, ako se tački $O(0,0)$ približavamo po pravoj $x = y$ (tj. ako posmatramo tačke oblika $X(x,x)$, a to onda znači da ako $X \to O$, onda mora $x \to 0$), tada je

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ ,$$

a ako se ka tački $O(0,0)$ približavamo po pravoj $x = -y$, tj. posmatramo tačke oblika $X(x,-x)$, imamo

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \ ,$$

iz čega je jasno da L ne postoji.

11.3. Neprekidnost funkcija više promjenljivih

Neka je funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ definisana u okolini tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Definicija 11..8. Funkcija tačke f je neprekidna u tački A ako vrijedi

$$\lim_{X\to A} f(X) = f(A) \ .$$

Prema tome, da bi funkcija f bila neprekidna u tački A treba biti zadovoljeno:

1. da postoji granična vrijednost funkcije kada $X \to A$,
2. da funkcija bude definisana u tački A,
3. da granična vrijednost funkcije u tački A bude jednaka vrijednosti funkcije u tački A.

Definicija 11..9. Funkcija f je neprekidna u tački A ako se za svako $\varepsilon > 0$ može odrediti $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da je za sve X takve da je $0 < d(X, A) < \delta$ zadovoljeno

$$|f(X) - f(A)| < \varepsilon .$$

Funkcija je neprekidna u oblasti D ako je neprekidna u svakoj tački te oblasti.

Naravno da gornju definiciju možemo posmatrati bilo sa sfernom bilo sa kubnom okolinom tačke A.

Teorem 11..10. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polinomijalna funkcija. Tada za svako $A \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) ,$$

tj. polinomijalna funkcija je neprekidna u svakoj tački $A \in \mathbb{R}^n$.

Teorem 11..11. *Ako je racionalna funkcija f definisana u tački A, tada vrijedi*

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) ,$$

tj. racionalna funkcija je neprekidna u svakoj tački svog domena.

Teorem 11..12. *Neka su funkcije $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidne u tački $A \in \mathbb{R}^n$. Tada su u toj tački neprekidne i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(A) \neq 0$) i kf (k proizvoljan skalar iz $\mathbb{R}$).*

Teorem 11..13. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u tački A i ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, tada je i $g \circ f$ neprekidna funkcija u tački A.*

Primjer. Kako je funkcija $g(t) = \sin t$ neprekidna za proizvoljno t iz $\mathbb{R}$ i kako je funkcija

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

neprekidna za sve tačke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, onda je i funkcija

$$h(x, y, z) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

neprekidna u svim tačkama iz $\mathbb{R}^3$.

Primjer. Prema prethodnom primjeru (samo za funkciju dvije varijable), funkcija

$$h(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$

je neprekidna za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Takodje je neprekidna i funkcija

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zaključujemo onda da je i funkcija

$$f(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

neprekidna u svakoj tački iz $\mathbb{R}^2$, različitoj od tačke $A(0, 0)$.

Medjutim,

$$\lim_{X\to A} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(d(X,A))}{d(X,A)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,.$$

Dakle, prekid funkcije u tački $A(0,0)$ je otklonjiv, tj. ako definišemo novu funkciju

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

onda je ona neprekidna u svim tačkama $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Definicija 11..14. Linija ili površ koja predstavlja skup tačaka prekida funkcije f naziva se linijom ili površinom prekida funkcije.

Ako je funkcija f neprekidna u oblasti D, ona je neprekidna po svakoj liniji i po svakoj površi koja leži u toj oblasti. Ako specijalno posmatramo prave paralelne koordinatnim osama, to onda znači da je funkcija neprekidna po svakoj varijabli posebno. Medjutim obrat ne važi, tj. funkcija može biti neprekidna po svakoj varijabli posebno ali da ipak ima prekide. Na primjer, funkcija

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

je u tački $O(0,0)$ neprekidna po svakoj varijabli, ali granična vrijednost (simultana) u tački O ne postoji, tj. funkcija ima prekid u tački O.

Primjer. $f(x,y) = \dfrac{e^x+e^y}{x^2+y^2-1}$. Linija prekida ove funkcije je kružnica $x^2+y^2=1$.

Primjer. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln(4-x^2-y^2-z^2)}$. Površ prekida funkcije je sfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Teorem 11..15. *Svaka funkcija n promjenljivih koja je neprekidna u zatvorenoj i ograničenoj oblasti je ograničena u toj oblasti.*

Teorem 11..16. *Ako je f neprekidna u proizvoljnoj oblasti i ako za $X_1 \neq X_2$ iz te oblasti vrijedi $f(X_1) \neq f(X_2)$, tada za proizvoljno C izmedju $f(X_1)$ i $f(X_2)$, postoji tačka X u toj oblasti takva da je $f(X) = C$.*

12. Diferencijabilnost funkcije više promjenljivih

Diferencijabilnost

U ovoj sekciji govorit ćemo o drugoj važnoj osobini proizvoljnog preslikavanja, o diferencijabilnosti. Ovdje ćemo pretpostavljati uvijek ako drugačije nije naglašeno, da svaka tačka domena D_f posmatranog preslikavanja, pripada tom skupu zajedno sa nekom svojom okolinom, tj. pretpostavljat ćemo da je skup D_f otvoren.

U nekim razmatranjima bit će neophodna i osobina povezanosti (koneksnosti) tog skupa. Za takav skup (otvoren i povezan) reći ćemo da je *oblast* u prostoru $\mathbb{R}^n$.

12.1. Izvod u pravcu

Izvod u pravcu
Za funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, izvod u tački $x_0 \in D_\phi$ definisali smo sa

$$\phi'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} , \tag{18}$$

i geometrijski, predstavljao je nagib tangente (tj. najbolju linearnu aproksimaciju) na krivu ϕ u tački $(x_0, \phi(x_0))$ ili trenutnu mjeru promjene funkcije $\phi(x)$ u odnosu na varijablu x, kada je $x = x_0$.
Kao uvod za nalaženje ovakve "najbolje linearne aproksimacije" za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pokušat ćemo iskoristiti, tj. generalizovati (18) da bi realizovali ideju "nagiba" i "mjere promjene" za ovakvo preslikavanje. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definisanu sa

$$f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2 .$$

Ukoliko želimo da vizualiziramo kretanje po ovom grafu (površi), nagib puta po kome se krećemo ovisi od polazne tačke ali i od pravca našeg kretanja.
Na primjer, neka je startna tačka $(1, 1, 1)$ na površi i neka je pravac kretanja odredjen vektorom $\vec{v'} = (-1, -1, 3)$. Ovo će uzrokovati kretanje direktno ka vrhu grafa i jasno je da je "mjera promjene" rastuća. Medjutim, ako se iz iste tačke krećemo u pravcu vektora $-\vec{v'}$, onda "silazimo niz graf", tj. "mjera promjene" je opadajuća. Obje ove mogućnosti naznačene su na slici crvenom bojom.
Ako iz iste tačke krenemo u pravcu vektora $\vec{w'} = (-1, 2, 0)$, vidimo da je putanja kretanja po elipsi

$$2x^2 + y^2 = 3 ,$$

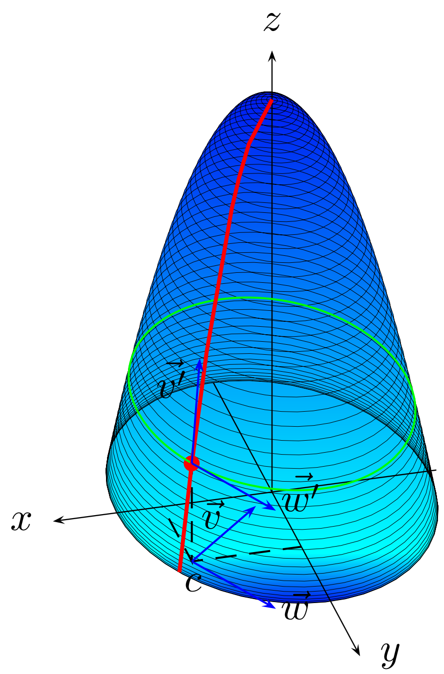
tj. "obilazimo" oko grafa, pa je "nagib" bez promjene, a time i "mjera promjene" je 0. Ova mogućnost kretanja je na slici prikazana zelenom bojom. Dakle, govoriti o "nagibu" na graf funkcije f u tački, zahtijeva specificirati pravac kretanja. Kretanju na grafu iz tačke $(1, 1, 1)$, u pravcu vektora $\vec{v'}$, odgovara kretanje u domenu funkcije, iz tačke c u pravcu vektora $\vec{v} = (-1, -1)$. Analogno kretanju u pravcu vektora $\vec{w'}$, odgovara kretanje iz c u pravcu $\vec{w} = (-1, 2)$.
Dakle, ukoliko se krećemo iz tačke $c = (1, 1)$ u pravcu vektora

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) ,$$

tada izraz

$$\frac{f(c + h\vec{u}) - f(c)}{h} ,$$

za proizvoljno $h > 0$, će predstavljati aproksimaciju nagiba na graf funkcije f u tački c u pravcu $\vec{u}$.
Kao što smo to radili sa funkcijama jedne varijable, puštajući sada da h teži ka 0, dobili



Slika 15: Izvod u pravcu

bi smo egzaktan nagib na graf, u tački c, u pravcu $\vec{u}$.

$$\begin{aligned} f(c+h\vec{u})-f(c) &= f\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}, 1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-f(1,1) \\ &= 4-2\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(1-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-1 \\ &= 3-3\left(1-\sqrt{2}h+\frac{h^2}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{2}-\frac{3h^2}{2}=h\left(3\sqrt{2}-\frac{3h}{2}\right) . \end{aligned}$$

Odavdje je sada

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h\vec{u})-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3\sqrt{2}-\frac{3h}{2}\right)=3\sqrt{2} .$$

Dakle, naš graf ima nagib od $3\sqrt{2}$ ukoliko startujemo iz tačke $(1,1)$, u pravcu vektora $\vec{u}$. Sličnim računom bi dobili da je u pravcu $-\vec{u}$ nagib $-3\sqrt{2}$, odnosno u pravcu vektora $\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ nagib je 0.

Definicija 12..1. Neka je funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definisana u nekoj otvorenoj kugli oko tačke c. Za dati vektor $\vec{u}$, izraz

$$D_u f(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h\vec{u})-f(c)}{h} , \tag{19}$$

ukoliko limes postoji, nazivamo izvod u pravcu, funkcije f, u pravcu vektora $\vec{u}$, u tački c.

Primjer. Prema gornjem razmatranju, za funkciju $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$ je

$$D_u f(1, 1) = 3\sqrt{2}\ ,\ D_{-u} f(1, 1) = -3\sqrt{2}\ ,\ D_w f(1, 1) = 0\ .$$

13. Parcijalni izvod i parcijalni diferencijal

Parcijalni izvod i parcijalni diferencijal
Kao što smo vidjeli iz gornjeg, za funkciju više varijabli nemožemo jednostavno govoriti o izvodu te funkcije, tj. možemo govoriti o izvodu ali pri tome moramo znati pravac kretanja, i tada ustvari govorimo o izvodu u pravcu.
Pravac u kome nalazimo izvod funkcije više varijabli može biti proizvoljan, ali pravci odredjeni baznim vektorima prostora domena su od posebne važnosti. Neka su $e_1, e_2, ..., e_n$ standardni vektori baze prostora $\mathbb{R}^n$, tj.

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)\ ,\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)\ \cdots\ e_n = (0, 0, 0, ..., 1)\ .$$

Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)\ ,$$

koja je definisana u nekoj okolini U_A tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Razmotrimo za trenutak funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uvedenu na sljedeći način

$$g(t) = f(t, x_2, x_3, ..., x_n)\ ,$$

tj. definišemo je preko funkcije f, tako što počev od druge, sve varijable držimo fiksnim (ne mjenjamo ih), a samo prvu shvatimo kao varijablu.
Dakle, tada je g funkcija jedne varijable pa na nju možemo primjeniti jednakost (18),

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\ .$$

Ali tada imamo

$$\begin{aligned}
g'(x_1) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_1+h) - g(x_1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((x_1, x_2, ..., x_n) + (h, 0, ..., 0)) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(X + he_1) - f(X)}{h} \\
&= D_{e_1} f(X)\ .
\end{aligned}$$

Vidimo da je izvod funkcije g u tački x_1 ustvari izvod u pravcu funkcije f u tački X, u pravcu vektora e_1. Na isti način smo mogli fiksirati k-tu promjenljivu ($k = 1, 2, ..., n$) funkcije f i zaključiti da bi vrijedilo

$$g'(x_k) = D_{e_k} f(X)\ .$$

Definicija 13..1. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u nekoj okolini tačke A i neka je e_k ($k \in \{1, 2, ..., n\}$) k-ti vektor standardne baze u $\mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji, izvod u pravcu $D_{e_k} f(A)$, nazivamo parcijalni izvod funkcije f po promjenljivoj x_k, u tački A.

Naravno da smo pojam parcijalnog izvoda mogli uvesti i na mnogo formalniji način, uvodeći pojmove priraštaja.

Definicija 13..2. Neka je $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ proizvoljna tačka iz okoline U_A tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n)$. Razliku

$$\triangle x_k = x_k - a_k \quad ; \quad k = 1, 2, ..., n$$

nazivamo priraštajem varijable x_k, a razliku

$$\triangle_{x_k} f(X) = f(x_1, ..., x_k + \triangle x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

nazivamo parcijalnim priraštajem funkcije f po promjenljivoj x_k, u tački X. Na isti način definišemo parcijalni priraštaj funkcije u proizvoljnoj tački $A(a_1, ..., a_n)$:

$$\triangle_{x_k} f(A) = f(a_1, ..., a_k + \triangle x_k, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n).$$

Primjećujemo da parcijalni priraštaj funkcije n promjenljivih dobijamo tako što vršimo promjenu samo jedne varijable dok ostale držimo fiksnim.

Definicija 13..3. Granična vrijednost

$$\lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{\triangle_{x_k} f(A)}{\triangle x_k} = \lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, ..., x_k, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{x_k - a_k},$$

naziva se parcijalnim izvodom funkcije f po promjenljivoj x_k u tački A.

Na analogan način definišemo parcijalni izvod u proizvoljnoj tački

$$\lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{\triangle_{x_k} f(X)}{\triangle x_k} = \lim_{\triangle x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + \triangle x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{\triangle x_k}.$$

U različitim knjigama matematičke analize nalazimo razne oznake za parcijalne izvode, kao npr.

$$f'_{x_k} \;;\; f_{x_k} \;;\; \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ i sl. .}$$

Mi ćemo najčešće koristiti oznaku $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, zato primjetimo da ovdje nismo koristili označavanje koje smo imali kod funkcije jedne promjenljive, tj. oznaku $\frac{df}{dx}$. Tehnika odredjivanja parcijalnog izvoda se ni u čemu ne razlikuje od tehnike izračunavanja izvoda funkcije jedne promjenljive.
Pri nalaženju parcijalnog izvoda po promjenljivoj x_k, sve ostale promjenljive shvatamo kao konstante, a nalazimo izvod po x_k, koristeći pravila i tablicu izvoda funkcija jedne promjenljive.

Primjer. Za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa $f(x, y) = xy$, parcijalni izvodi su

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)y - xy}{\Delta x} = y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y + \Delta y) - xy}{\Delta y} = x.$$

Primjer. $f(x,y) = \sin(xy - y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy-y) \\
&= \cos(xy-y)\frac{\partial}{\partial x}(xy-y) \\
&= \cos(xy-y)\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial x}y\right) \\
&= y\cos(xy-y)\ .
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ?$$

Primjer. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \ln(x+yz)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\ln(x+zy) = \frac{1}{x+zy}\frac{\partial}{\partial x}(x+zy) = \frac{1}{x+yz}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\ln(x+yz) = \frac{1}{x+yz}\frac{\partial}{\partial y}(x+yz) = \frac{z}{x+yz}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln(x+yz) = \frac{1}{x+yz}\frac{\partial}{\partial z}(x+yz) = \frac{y}{x+yz}\ .$$

Parcijalni izvodi u konkretnoj tački, npr. $A(1,1,2)$ bili bi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2) = \frac{1}{3}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2) = \frac{2}{3}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) = \frac{1}{3}\ .$$

Primjer. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

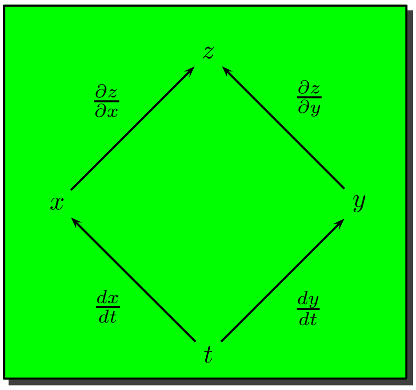
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x}y}{y^2} = \frac{y-0}{y^2} = \frac{1}{y}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y\frac{\partial}{\partial y}x - x\frac{\partial}{\partial y}y}{y^2} = \frac{0-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2}\ .$$

Kod funkcije jedne varijable $y = f(x)$, ako je $x = g(t)$, imali smo pravilo izvoda složene funkcije (*pravilo kompozicije*) $y = f(g(t))$, koje glasi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\ .$$

Pravilo kompozicije moramo takodje imati i kod funkcija više varijabli. Pokazat ćemo to pravilo za funkciju dvije varijable, a ono se lako prenosi na funkcije sa n varijabli. Neka je $z = f(x,y)$ i neka su i x i y funkcije nekog parametra t, tj. $x = x(t)$ i $y = y(t)$. Tada je funkcija $z = f(x(t), y(t))$, ustvari funkcija jedne varijable (t) i pri tome imamo:
Ako su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ diferencijabilne u t i ako je funkcija f diferencijabilna u tački $(x(t), y(t))$, tada vrijedi

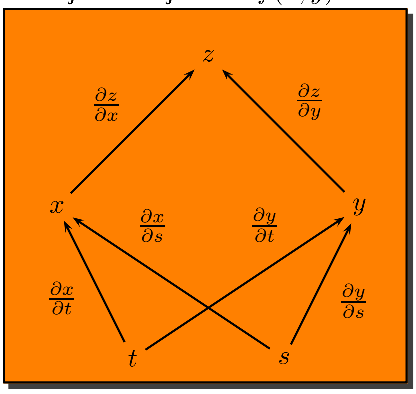


$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \ .$$

Primjer. Neka je $f(x, y) = \sin x + \cos(xy)$ i neka su $x = t^2$ i $y = t^3$. Tada prema pravilu kompozicije imamo

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= (\cos x - \sin(xy)y)2t + (-\sin(xy)x)3t^2 \\ &= (\cos t^2 - t^3 \sin t^5)2t - 3t^4 \sin t^5 \ . \end{aligned}$$

Ukoliko su x i y zavisne od dvije varijable, tj. $x = x(t, s)$ i $y = y(t, s)$, tada pravilo kompozicije glasi: Ako funkcije x i y imaju parcijalne izvode prvog reda u tački (t, s) i ako je funkcija $z = f(x, y)$ diferencijabilna u tački $(x(t, s), y(t, s))$, tada vrijedi



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \ .$$

13.1. Gradijent

Gradijent

Definicija 13..4. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u okolini U_A tačke A i neka postoje $\frac{\partial f}{\partial x_k}(A)$ za sve $k = 1, 2, ..., n$. Vektor

$$\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right) \ ,$$

nazivamo gradijent funkcije f u tački A.

Primjer. Na osnovu Primjera 332, gradijent funkcije $f(x, y) = xy$ je

$$\nabla f(x, y) = (y, x) \ ,$$

odnosno u konkretnoj tački je, npr. $\nabla f(-2, 7) = (7, -2)$.

Primjer. Iz Primjera 334 imamo

$$\nabla f(1,1,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) .$$

Primjer. Za funkciju $f(x,y) = 4 - 2x^2 - y^2$ imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \ ,$$

pa je gradijent dat sa

$$\nabla f(x,y) = (-4x, 2y) \ .$$

Konkretno u tački $O(0,0)$ je $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Korisno je primjetiti jednu stvar, a to je da za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, njen gradijent je funkcija $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tj. gradijent je funkcija čiji je ulaz n-dimenzionalna veličina (vektor), a izlazna je takodje n-dimenzionalni vektor. Ovakve funkcije uobičajeno nazivamo *vektorsko polje*, a sa čime ćemo se susresti u narednim matematičkim izučavanjima.
Nije teško pokazati da za gradijent vrijede sljedeća pravila:

1. $\nabla(kf) = k\nabla f$, ($k = const.$).
2. $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$.
3. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$.

13.2. Diferencijabilnost funkcija više promjenljivih

Diferencijabilnost funkcija više promjenljivih
Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana u nekoj okolini U_A tačke $A(a_1, a_2, ..., a_n)$. Samo postojanje parcijalnih izvoda ne obezbjedjuje neke bitne osobine posmatrane funkcije, što vidimo iz sljedećeg primjera.

Primjer. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nije teško pokazati da je f prekidna funkcija u tački $(0,0)$. S druge strane ona ima oba parcijalna izvoda u tački $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0 \ .$$

Dakle, parcijalni izvodi postoje u tački $(0,0)$, a funkcija ima prekid u toj tački.

Jasno je dakle, da za razliku od funkcija jedne promjenljive, postojanje parcijalnih izvoda ne može garantovati odredjene "lijepe" osobine funkcije, nego moramo posmatrati neka svojstva koja uzimaju u obzir ponašanje funkcije u čitavoj okolini posmatrane tačke.

Definicija 13..5. Razlika

$$\triangle f = f(X) - f(A)\ ;\ (X \in U_A)\ ,$$

naziva se totalni priraštaj funkcije f u tački A.

Totalni priraštaj izražavamo preko priraštaja nezavisnih promjenljivih, tj.

$$\triangle f = f(a_1 + \triangle x_1, ..., a_n + \triangle x_n) - f(a_1, ..., a_n)\ ,$$

ili za proizvoljnu tačku X sa

$$\triangle f = f(x_1 + \triangle x_1, ..., x_n + \triangle x_n) - f(x_1, ..., x_n)\ .$$

Za razliku od parcijalnog priraštaja gdje jednu varijablu mijenjamo, a sve druge "držimo" fiksnim, kod totalnog priraštaja sve varijable istovremeno "doživljavaju" neku promjenu.

Definicija 13..6. Za funkciju $f(X) = f(x_1, ..., x_n)$ definisanu u okolini tačke $A \in \mathbb{R}^n$, kažemo da je diferencijabilna u toj tački ako vrijedi

$$\triangle f = L(X) + \omega(X) d(X, A)\ ,$$

$$L(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - a_k) \qquad (20)$$

je linearna funkcija priraštaja nezavisnih promjenljivih, p_k $(k = 1, 2, ..., n)$ su realni koeficijenti, $\omega(X)$ neprekidna funkcija u tački A takva da je $\lim_{X \to A} \omega(X) = \omega(A) = 0$

i

$$d(X, A) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

rastojanje tačke X od tačke A.

Definicija 13..7. Linearnu funkciju $L(X)$ iz (20) nazivamo totalni diferencijal funkcije $f(X)$ u tački A i označavamo ga sa

$$L(X) = df(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \triangle x_k\ .$$

Potrebni uslovi diferencijabilnosti

Teorem 13..8. *Neka je funkcija $f(X)$ diferencijabilna u tački A. Tada vrijedi:*

1. *Postoji parcijalni izvod po svakoj promjenljivoj u tački A.*

2. *Koeficijenti* p_k *(*$k = 1, 2, ..., n$*) u izrazu za totalni diferencijal su parcijalni izvodi funkcije, tj.*

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \; ; \; k = 1, 2, ..., n \; .$$

Dokaz. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački A, tada po definiciji 13..6 vrijedi

$$\triangle f = f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x_k - a_k) + \omega d \; .$$

Ako fiksiramo $n - 1$ promjenljivih

$$x_1 = a_1, ..., x_{k-1} = a_{k-1}, x_{k+1} = a_{k+1}, ..., x_n = a_n \; ,$$

imamo

$$\begin{aligned} \triangle f &= f(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_k, ..., a_n) \\ &= p_k(x_k - a_k) + \omega(X)|x_k - a_k| \end{aligned}$$

odakle je $\square$

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{\triangle f}{x_k - a_k} = p_k + sgn(x_k - a_k) \lim_{x_k \to a_k} \omega(a_1, ..., a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, ..., a_n) \; .$$

Odavde vidimo da za proizvoljno $k \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi

$$p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \; ,$$

iz čega vidimo da parcijalni izvodi postoje i da su oni upravo koeficijenti p_k ($k = 1, 2, ..., n$). $\square$

Na osnovu gornje teoreme vidimo da totalni diferencijal diferencijabilne funkcije $f(X)$ ima oblik

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n \; ,$$

ili izraženo vektorski

$$df(X) = \nabla f(X) \cdot dX \; ,$$

gdje je $dX = (dx_1, dx_2, ..., dx_n)$, vektor priraštaja nezavisnih varijabli.

Teorem 13..9. *Ako je funkcija* $f(x_1, ..., x_n)$ *diferencijabilna u tački* A*, ona je i neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Iz diferencijabilnosti funkcije imamo

$$\triangle f = f(X) - f(A) = L(X) + \omega(X)d(X, A) \; ,$$

a odavde onda imamo

$$\lim_{X \to A}(f(X) - f(A)) = \lim_{X \to A} L(X) + \lim_{X \to A} \omega(X)d(X, A) = 0$$

(jer je $L(A) = 0$). Ovo ne znači ništa drugo do

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A) \; ,$$

tj. neprekidnost funkcije f u tački A. $\square$

Primjer. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadatu sa

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Data funkcija je neprekidna u tački $(0,0)$ (vježba) i ima parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Medjutim, f nije diferencijabilna u tački $(0,0)$. Zaista, ako bi bila diferencijabilna imali bi smo

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y \\ &+ \omega(\Delta x, \Delta y) d(X,O) \ , \end{aligned}$$

odnosno, odavde je zbog $d(X,O) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$$\omega(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

Zbog osobine funkcije ω, moralo bi biti $\lim\limits_{X \to O} \omega(X) = 0$, tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \ ,$$

što nije tačno jer za $\Delta x = \Delta y > 0$ je

$$\frac{\Delta x \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \nrightarrow 0 \ .$$

Uslov diferencijabilnosti u gornjoj teoremi možemo zamijeniti nešto slabijim uslovima. Naime vrjedi

Teorem 13..10. *Ako funkcija $f(X)$ u nekoj oblasti D ima ograničene parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj, tada je ona neprekidna u toj oblasti.*

Šta više, sa još bližim informacijama o parcijalnim izvodima možemo imati još preciznije informacije o funkciji. Tako vrijedi

Teorem 13..11. *Ako funkcija $f(X)$ u oblasti D ima parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj jednake nuli, onda je funkcija u toj oblasti konstanta.*

Sljedeći teorem je analogon Lagrangeovoj teoremi za funkcije jedne promjenljive.

Teorem 13..12. ***(Lagrangeov teorem)*** *Ako funkcija $f(X)$ u okolini U_A tačke A ima konačne ili beskonačne parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj, tada za proizvoljno $X \in U_A$ postoje tačke $X_1, X_2, ..., X_n \in U_A$, takve da je*

$$f(X) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_k)(x_k - a_k) \ .$$

Dovoljni uslovi diferencijabilnosti

Teorem 13..13. *Ako funkcija $f(X)$ ima u okolini tačke A parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj i ako su ti parcijalni izvodi neprekidni u tački A, tada je funkcija $f(X)$ diferencijabilna u tački A.*

Dokaz
Dokaz ćemo, jednostavnosti zapisa radi, dati za funkciju dvije promjenljive i on se lako može prenijeti na funkcije sa n promjenjlivih.
Na osnovu Lagrangeovog teorema, priraštaj funkcije $f(x, y)$ ima oblik

$$f(x,y) - f(a,b) = f_x(X_1)(x-a) + f_y(X_2)(y-b)\ , \tag{21}$$

gdje su tačke $X(x, y), X_1(\xi_1, b)$ i $X_2(a, \xi_2)$ iz okoline U_A tačke A. Zbog pretpostavljene neprekidnosti parcijalnih izvoda, tj. funkcija $f_x(x, y)$ i $f_y(x, y)$ u tački $A(a, b)$, iz (21) imamo da vrijedi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = f(a,b)\ ,$$

pa važi

$$f_x(X_1) = f_x(A) + \varepsilon_1(X)\ ,\ f_y(X_2) = f_y(A) + \varepsilon_2(X)\ ,$$

gdje $\varepsilon_1 \to 0$ i $\varepsilon_2 \to 0$ kada $X \to A$.
Ako posljednje dvije jednakosti pomnožimo sa $x-a$ i $y-b$ respektivno, i tako dobijene jednakosti saberemo, dobijamo

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(a,b) &= f_x(X_1)(x-a) + f_y(X_2)(y-b) \\ &= f_x(A)(x-a) + f_y(A)(y-b) + \varepsilon_1(X)(x-a) + \varepsilon_2(X)(y-b)\ , \end{aligned}$$

odnosno

$$\triangle f = df + \varepsilon_1(X)(x-a) + \varepsilon_2(X)(y-b)\ ,$$

iz čega se, na osnovu Definicije 13..6, vidi da je funkcija f diferencijabilna u tački A. $\square$

Za funkciju koja u nekoj tački ima neprekidne parcijalne izvode, reći ćemo da je *neprekidno diferencijabilna* u toj tački. Ako funkcija f zadovoljava taj uslov u svim tačkama nekog skupa D, onda kažemo da je f neprekidno diferencijabilna na D. Skup neprekidno diferencijabilnih funkcija na nekom skupu D označavamo sa $C^1(D)$.
Posmatrajmo sada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i neka je f neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj okolini U_A tačke $A(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Neka je $u = (u_1, u_2)$ proizvoljan jedinični vektor i nadjimo izvod u pravcu $D_u f(A)$. Na osnovu definicije izvoda u pravcu imamo

$$\begin{aligned} D_u f(A) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(A+hu) - f(A)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1+hu_1, a_2+hu_2) - f(a_1,a_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1+hu_1, a_2+hu_2) - f(a_1+hu_1, a_2) + f(a_1+hu_1, a_2) - f(a_1,a_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a_1+hu_1, a_2+hu_2) - f(a_1+hu_1, a_2)}{h} + \frac{f(a_1+hu_1, a_2) - f(a_1,a_2)}{h} \right)\ . \end{aligned}$$

Za fiksno $h \neq 0$, definišimo sada funkciju $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sa

$$\phi(t) = f(a_1 + hu_1, a_2 + t)\ .$$

Na osnovu pretpostavke o diferencijabilnosti funkcije f i ϕ je diferencijabilna, te imamo

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{\phi(t+s)-\phi(t)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{f(a_1+hu_1,a_2+t+s)-f(a_1+hu_1,a_2+t)}{s}\\ &= \frac{\partial}{\partial y}f(a_1+hu_1,a_2+t)\ .\end{aligned}$$

Neka je sada $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definisana sa

$$\alpha(t)=\phi(u_2t)=f(a_1+hu_1,a_2+tu_2)\ . \tag{22}$$

α je diferencijabilna i na osnovu izvoda složene funkcije imamo

$$\alpha'(t)=u_2\phi'(t)=u_2\frac{\partial}{\partial y}f(a_1+hu_1,a_2+tu_2)\ . \tag{23}$$

Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti funkcije jedne varijable, postoji $\xi\in(0,h)$, takav da vrijedi

$$\frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h}=\alpha'(\xi)\ .$$

Stavljajući sada (22) i (23) u gornju jednakost, dobijamo

$$\frac{f(a_1+hu_1,a_2+hu_2)-f(a_1+hu_1,a_2)}{h}=u_2\frac{\partial}{\partial y}f(a_1+hu_1,a_2+\xi u_2)\ . \tag{24}$$

Na isti način, posmatrajući funkciju $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, zadatu sa

$$\beta(t)=f(a_1+tu_1,a_2)\ ,$$

imamo da vrijedi

$$\beta'(t)=u_1\frac{\partial}{\partial x}f(a_1+tu_1,a_2)\ ,$$

i opet koristeći teorem o srdnjoj vrijednosti, zaključili bi da postoji $\eta\in(0,h)$, tako da je

$$\begin{aligned}\frac{f(a_1+hu_1,a_2)-f(a_1,a_2)}{h}=\frac{\beta(h)-\beta(0)}{h}&=\beta'(\eta)=\\ &=u_1\frac{\partial}{\partial x}f(a_1+\eta u_1,a_2)\ .\end{aligned} \tag{25}$$

Stavljajući sada (24) i (25) u izraz za $D_uf(A)$, imamo

$$D_uf(A)=\lim_{h\to 0}\left(u_2\frac{\partial}{\partial y}f(a_1+hu_1,a_2+\xi u_2)+u_1\frac{\partial}{\partial x}f(a_1+\eta u_1,a_2)\right)\ . \tag{26}$$

Kako su $\xi,\eta\in(0,h)$, kada $h\to 0$, to onda i $\xi,\eta\to 0$. Iskoristivši definitivno i pretpostavku o neprekidnosti parcijalnih izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$, računajući limes u (26), dobijamo

$$D_uf(A)=u_1\frac{\partial}{\partial x}f(a_1,a_2)+u_2\frac{\partial}{\partial y}f(a_1,a_2)\ . \tag{27}$$

Generalizaciju tvrdnje iskazane u (27) iskazujemo za funkciju $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sljedećom teoremom.

Teorem 13..14. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke $A \in \mathbb{R}^n$. Tada za proizvoljan jedinični vektor u, postoji $D_u f(A)$ i vrijedi*

$$D_u f(A) = \nabla f(A) \cdot u \ .$$

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadata sa

$$f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2 \ .$$

$\nabla f(x, y) = (-4x, -2y)$, pa za vektor $u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ imamo

$$D_u f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot u = (-4, -2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2} \ ,$$

što možemo potvrditi sa ranije uradjenim primjerom.

Sada jednostavno računamo i

$$D_{-u} f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (-u) = (-4, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\sqrt{2} \ .$$

Za vektor $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ imamo

$$D_v f(1, 1) = (-4, -2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 \ .$$

Neka je sada u proizvoljan jedinični vektor, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $A \in \mathbb{R}^n$. Koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, možemo zaključiti sljedeće,

$$|D_u f(A)| = |\nabla f(A) \cdot u| \leq ||\nabla f(A)||\ ||u|| = ||\nabla f(A)|| \ . \tag{28}$$

Ovo nam govori, bukvalno čitajući, da je apsolutna vrijednost izvoda funkcije u pravcu u u tački A, manja ili jednaka intenzitetu vektora gradijenta funkcije u toj tački. Nešto konkretnije, ovo znači da veličina promjene rasta funkcije u nekoj tački u proizvoljnom pravcu nikad ne prelazi dužinu vektora gradijenta u toj tački. Šta više, znajući osobine Cauchy-Schwarzove nejednakosti, jednakost u (28) će se postići upravo u slučaju kada je vektor u kolinearan vektoru $\nabla f(A)$. Zaista, ako je $\nabla f(A) \neq 0$, onda za vektor

$$u = \frac{\nabla f(A)}{||\nabla f(A)||}$$

imamo,

$$D_u f(A) = \nabla f(A) \cdot u = \frac{\nabla f(A) \cdot \nabla f(A)}{||\nabla f(A)||} = \frac{||\nabla f(A)||^2}{||\nabla f(A)||} = ||\nabla f(A)|| \ .$$

Šta više, vrijedi

$$D_{-u} f(A) = -||\nabla f(A)|| \ .$$

Gornju tvrdnju iskazujemo teoremom

Teorem 13..15. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj otvorenoj kugli koja sadrži tačku A. Tada $D_u f(A)$ ima maksimalnu vrijednost $||\nabla f(A)||$ kada je vektor u ort vektor vektora $\nabla f(A)$, a minimalnu vrijednost $-||\nabla f(A)||$ kada je u ort vektor vektora $-\nabla f(A)$.*

Dakle, gradijentni vektor pokazuje pravac i smjer maksimalne promjene rasta funkcije, odnosno negativni gradijentni vektor pokazuje pravac i smjer maksimalne promjene opadanja funkcije. Šta više, intenzitet gradijentnog vektora nam govori o veličini rasta u smjeru maksimalnog rasta, odnosno njegova negativna vrijednos govori o veličini opadanja funkcije u smjeru maksimalnog opadanja.

Primjer. Posmatrajmo ponovo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadatu sa

$$f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2 ,$$

za koju je

$$\nabla f(x, y) = (-4x, -2y) .$$

Ukoliko se nalazimo u tački $A(1, 1)$ (na grafu u tački $(1, 1, 1)$) i želimo krenuti u smjeru najvećeg rasta funkcije f, na osnovu gornje teoreme, trebamo krenuti u pravcu vektora

$$u = \frac{\nabla f(1, 1)}{||\nabla f(1, 1)||} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

Ako tražimo pravac najbržeg opadanja funkcije, onda će to biti u pravcu vektora

$$-u = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) .$$

Šta više, veličina promjene rasta u pravcu tog vektora je

$$D_u f(1, 1) = ||\nabla f(1, 1)|| = \sqrt{20} ,$$

a veličina opadanja je

$$D_{-u} f(1, 1) = -||\nabla f(1, 1)|| = -\sqrt{20} .$$

Razmotrimo još jedan važan fakat vezan za gradijent funkcije. Pokazaćemo ga za funkciju dvije varijable, a isto rezonovanje imamo za proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Dakle, neka je data funkcija $z = f(x, y)$ čiji je graf površ G u prostoru $\mathbb{R}^3$. Posmatrajmo poizvoljnu tačku $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na grafu G i neka je l nivo linija na grafu G koja prolazi kroz tačku P. Kako je za tu liniju zadovoljeno $f(x, y) = k$, za neko fiksno $k \in \mathbb{R}$, i kako je ona jednodimenzionalan objekat u prostoru, možemo je parametrizovati, tj. svaku tačku linije l možemo posmatrati kao vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Neka je t_0 ona vrijednost parametra koja odgovara tački P.Kako je nivo linija l na površi G, mora za svako t biti zadovoljena jednačina

$$f(x(t), y(t)) = k .$$

Diferenciranjem ove jednakosti po t, primjenom pravila kompozicije, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 . \qquad (29)$$

Nije teško vidjeti da se jednakost (29) može zapisati u vektorskoj notaciji,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \nabla f \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \ .$$

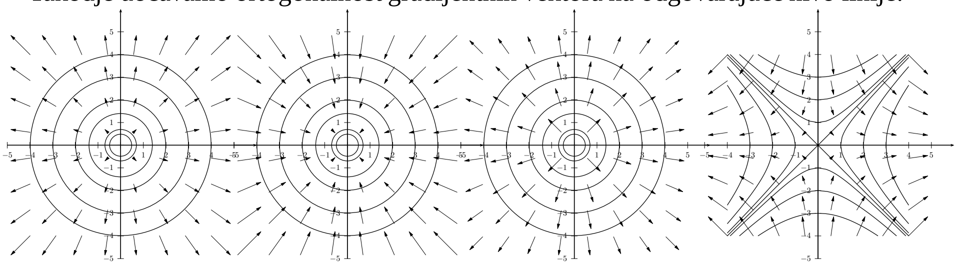
Gornje će vrijediti u proizvoljnoj tački nivo linije l, tj.

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = 0 \ .$$

Dakle, vrijedi vrdnja,

Teorem 13..16. *Gradijentni vektor funkcije $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ u svakoj tački nivo linije $f(x_1, x_2, ..., x_n) = k$, ortogonalan je na tu liniju.*

Na sljedećoj slici prikazano je nekoliko funkcija konturnim grafom (pomoću nivo linija) i odgovarajućim "vektorskim poljem" ("strelice" na slici predstavljaju gradijentne vektore date funkcije u raznim tačkama). "Strelice" su usmjerene u pravcu najbržeg rasta funkcije, a i veličina strelica odražava brzinu promjene funkcije u tom pravcu. Takodje uočavamo ortogonalnost gradijentnih vektora na odgovarajuće nivo linije.



$f(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad$ $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ $\quad$ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad$ $f(x, y) = x^2 - y^2$

13.3. Pravila diferenciranja

Pravila diferenciranja
Kao što smo već mogli primjetiti, pravila nalaženja diferencijala funkcija više varijabli neće se razlikovati od tih pravila kod funkcije jedne varijabe.

Teorem 13..17. *Neka su funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) diferencijabilne u tački $A \in D$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je i funkcija $af + bg$ diferencijabilna u tački A i vrijedi*

$$d(af + bg)(A) = adf(A) + bdg(A) \ .$$

Teorem 13..18. *Neka su funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$) diferencijabilne u tački $A \in D$. Tada su i funkcije $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$ (posljednja uz uslov $g(A) \neq 0$) diferencijabilne u tački A i vrijedi*

$$d(fg)(A) = g(A)df(A) + f(A)dg(A) \ ,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(A) = \frac{g(A)df(A) - f(A)dg(A)}{(g(A))^2} \ .$$

14. Izvodi višeg reda, Hesseova matrica

14.1. Izvod višeg reda

Izvod višeg reda
Ukoliko funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima parcijalne izvode koji postoje na nekom otvorenom skupu U, tada za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je takodje funkcija sama za sebe, tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Parcijalni izvodi funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, ukoliko postoje, nazivaju se *parcijalni izvodi drugog reda* funkcije f.
Kao i za prve parcijalne izvode i za druge parcijalne izvode postoje razne oznake kao naprimjer: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $f''_{x_i x_j}$, $D_{x_i x_j} f$ ili jednostavno $f_{x_i x_j}$. Mi ćemo se služiti uglavnom prvom navedenom notacijom, ali po potrebi skraćivanja zapisa, često ćemo upotrebljavati i posljednju navedenu notaciju. Tako za funkciju $z = f(x, y)$ imamo sljedeće parcijalne izvode drugog reda, zapisane i sa prvom i sa posljednjom notacijom:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}
\end{aligned}
$$

Tehnika nalaženja parcijalnih izvoda drugog reda sadržana je u simboličkom zapisivanju tih izvoda. Naprimjer, f_{xy} znači da od izvoda f'_x (prvi s lijeva indeks nam govori od koga pravimo parcijalni izvod) nalazimo parcijalni izvod po y (drugi indeks s lijeva nam govori po čemu radimo drugi parcijalni izvod).

Primjer. Odredimo parcijalne izvode drugog reda funkcije $z = x^2 y$.
Prvo odredimo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \;\; ; \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \; .$$

Odredimo sada parcijalne izvode drugog reda, koristeći gornje objašnjenje. Za nalaženje f_{xx}, uzimamo $\frac{\partial z}{\partial x}$ i od njega tražimo parcijalni izvod po x. Tako dobijamo

$$f_{xx} = (2xy)'_x = 2y \; .$$

Analogno, za f_{xy} uzimamo prvi parcijalni izvod po x, pa od njega tražimo izvod po y

$$f_{xy} = (2xy)'_x = 2x \; .$$

Istu logiku koristimo kod nalaženja ostala dva parcijalna izvoda drugog reda,

$$f_{yx} = 2x \;\; ; \;\; f_{yy} = 0 \; .$$

Primjer. $z = e^{x^2+y^2}$

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2} \;\; ; \;\; f_y = 2ye^{x^2+y^2} \; .$$

$$f_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 2x2xe^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2x^2)$$
$$f_{xy} = 2x2ye^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2} \; ;$$
$$f_{yx} = 2y2xe^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$f_{yy} = 2e^{x^2+y^2} + 2y2ye^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+2y^2) \; .$$

Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, parcijalne izvode $f_{x_i x_j}$ i $f_{x_j x_i}$ $(i \neq j)$, nazivamo *mješoviti parcijalni izvodi* i na osnovu opisanog postupka, jasna nam je razlika istaknuta poretkom indeksa.
U pokazana dva primjera primijećujemo da su mješoviti parcijalni izvodi jednaki, $f_{xy} = f_{yx}$. Postavlja se pitanje da li je to tako u opštem slučaju? Kao što ćemo kasnije vidjeti taj uslov je veoma bitan, a ovdje ćemo dati uslove pod kojima su ti parcijalni izvodi jednaki za funkciju dvije promjenljive. Prije toga, odgovor na postavljeno pitanje nam daje sljedeći primjer.

Primjer. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadatu sa

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tada je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \; , \; (x,y) \neq (0,0) \; ; \; \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \; .$$

Onda je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h \to 0}\frac{-h}{h} = -1 \; .$$

Na sličan način odredjujući, imamo da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \; ,$$

pa očigledno u opštem slučaju mješoviti izvodi nisu jednaki.

Definicija 14..1. Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je dva puta neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^n$, i pišemo $f \in C^2(U)$, ako su funkcije $f_{x_i x_j}$ neprekidne na U, za sve $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Pod odredjenim uslovima koji su dati u narednoj teoremi, mješoviti izvodi će biti jednaki.

Teorem 14..2. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup koji sadrži tačku A i neka je funkcija $f \in C^2(U)$. Tada vrijedi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) \; ,$$

za sve $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Gornje rezonovanje o parcijalnim izvodima drugog reda sada možemo proširiti na parcijalne izvode trećeg, četvrtog i višeg reda, kao i na funkcije tri, četiri i više promjenljivih. Za funkciju dvije varijable, vidjeli smo, postoje četiri parcijalna izvoda drugog reda. Praveći od njih ponovo parcijalne izvode, dobijamo parcijalne izvode trećeg reda, kojih će tada biti osam. Za funkciju tri varijable, parcijalnih izvoda drugog reda ima devet, a trećeg reda 27.
U opštem slučaju, funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima n^2 parcijalnih izvoda drugog reda, od kojih onda možemo formirati kvadratnu matricu reda $n \times n$.

14.2. Hesseova matrica

Hesseova matrica

Definicija 14..3. Neka svi parcijalni izvodi drugog reda funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postoje u tački $c \in \mathbb{R}^n$. Matricu reda $n \times n$

$$\mathbf{H}f(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3}(c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(c) \end{bmatrix} \tag{30}$$

nazivamo Hesseova matrica ili Hessijan funkcije f u tački c.

Primjetimo da je i-ta kolona Hesseove matrice, gradijent funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, tj. $\nabla f'_{x_i}(c)$.

Primjer. Neka je $f(x, y) = x^2 y - xy^2$. Tada je

$$\mathbf{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{bmatrix} .$$

Sada naprimjer, u tački $A(2, 1)$, Hessijan glasi

$$\mathbf{H}f(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} .$$

Neka je sada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na nekoj otvorenoj kugli $B(A, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $h = (h_1, h_2)$ vektor, takav da je $||h|| < r$. Definišimo novu funkciju $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, na sljedeći način

$$\varphi(t) = f(A + th) .$$

(Veličinu $A + th$ shvatamo tako da se iz tačke A pomjerimo u pravcu vektora h, za dužinu $t||h||$) Funkcija φ je funkcija jedne varijable i pri tome je npr. $\varphi(0) = f(A)$ i $\varphi(1) = f(A + h)$. Na osnovu Taylorove teoreme za funkciju jedne varijable sada imamo

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi) , \tag{31}$$

gdje je $\xi \in (0, 1)$. Kako je $d\varphi = df$, koristeći pravilo izvoda kompozicije, imamo

$$\varphi'(t) = \nabla f(A+th) \cdot \frac{d}{dt}(A+th) = \nabla f(A+th) \cdot h = f_x(A+th)h_1 + f_y(A+th)h_2. \tag{32}$$

(jasno, u izrazu $\nabla f(A+th)\cdot h$ imamo skalarno množenje). Analogno nalazimo i drugi izvod

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \nabla\left(h_1 f_x(A+th)+h_2 f_y(A+th)\right)\cdot h\\ &= \left(h_1\nabla f_x(A+th)+h_2\nabla f_y(A+th)\right)\cdot(h_1,h_2)\\ &= [h_1\ h_2]\left[\begin{array}{cc} f_{xx}(A+th) & f_{xy}(A+th)\\ f_{yx}(A+th) & f_{yy}(A+th)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} h_1\\ h_2\end{array}\right].\end{aligned}$$

(Zadnji zapis dobijamo nakon jednostavnog matričnog računa). Koristeći sada oznake

$$h=\left[\begin{array}{c} h_1\\ h_2\end{array}\right]$$

i

$$h^T=[h_1\ h_2]\ ,$$

posljednje možemo zapisati sa

$$\varphi''(t)=h^T\mathbf{H}f(A+th)h\ . \tag{33}$$

Stavljajući (32) i (33) u izraz (31), dobijamo sljedeću vezu

$$f(A+h)=\varphi(1)=f(A)+\nabla f(A)\cdot h+\frac{1}{2}h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h\ .$$

Ovaj rezultat predstavlja verziju Taylorove teoreme za funkcije više varijabli, koga generalizujemo sljedećom teoremom

Teorem 14..4. *Neka je $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ i neka je $f\in C^2(B(A,r))$ ($r>0$). Neka je h vektor, takav da je $||h||<r$. Tada postoji realan broj $\xi\in(0,1)$, takav da vrijedi*

$$f(A+h)=f(A)+\nabla f(A)\cdot h+\frac{1}{2}h^T\boldsymbol{H}f(A+\xi h)h\ . \tag{34}$$

Uvedemo li oznake $X=A+h$ i izračunamo li Hessijan u tački A, izraz (34) predstavlja polinomijalnu aproksimaciju funkcije f.

Definicija 14..5. Neka je $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na nekoj otvorenoj kugli oko tačke A. Funkciju

$$P_2(X)=f(A)+\nabla f(A)(X-A)+\frac{1}{2}(X-A)^T\mathbf{H}f(A)(X-A)\ ,$$

nazivamo Taylorov polinom drugog reda, funkcije f u tački A.

Primjer. Odredimo Taylorov polinom drugog reda za funkciju $f(x,y)=e^{-2x+y}$, u tački $(0,0)$.
Kao prvo, nalazimo

$$\nabla f(x,y)=\left(-2e^{-2x+y},e^{-2x+y}\right)$$

$$\mathbf{H}f(x,y)=\left[\begin{array}{cc} 4e^{-2x+y} & -2e^{-2x+y}\\ -2e^{-2x+y} & e^{-2x+y}\end{array}\right],$$

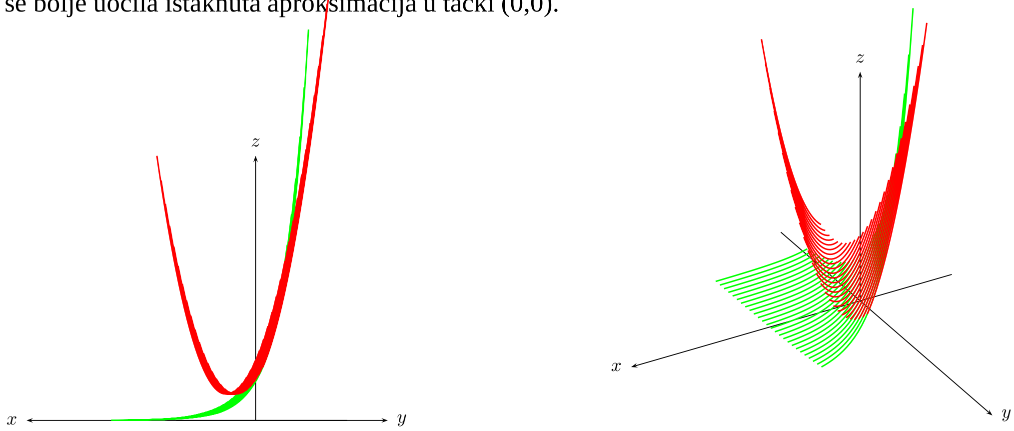
odnosno

$$\nabla f(0,0)=(-2,1)\ ,\ \mathbf{H}f(0,0)=\left[\begin{array}{cc} 4 & -2\\ -2 & 1\end{array}\right].$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}[x\ y]\mathbf{H}f(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= 1 + (-2,1)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= 1 - 2x + y + \frac{1}{2}[x\ y]\begin{bmatrix} 4x-2y \\ -2x+y \end{bmatrix} \\
&= 1 - 2x + y + \frac{1}{2}(4x^2 - 2xy - 2xy + y^2) \\
&= 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 2x + y + 1\,.
\end{aligned}$$

Svrha Taylorovog polinoma je da se funkcija njime dovoljno dobro aproksimira u okolini neke tačke. Na slici (16) dat je prikaz te aproksimacije iz dva ugla posmatranja, da bi se bolje uočila istaknuta aproksimacija u tački (0,0).



Slika 16: Aproksimacija funkcije $f(x,y) = e^{-2x+y}$ (zelena) u tački (0,0), Taylorovim polinomom $P_2(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2xy - 2y + y + 1$ (crvena)

U dijelu linearne algebre, koga smo izučavali ranije, upoznali smo pojam *simetrične matrice*, tj. kvadratne matrice $M = [a_{ij}]_{n\times n}$ za koju vrijedi

$$M = M^T\,,$$

ili za čije elemente vrijedi $a_{ij} = a_{ji}$.

Primjer. Matrica

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

primjer je simetrične matrice, a matrica

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

je primjer nesimetrične matrice.

Ako je $f \in C^2$, tada na osnovu Teorema (14..2), imamo da su mješoviti izvodi jednaki, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\,,$$

a to će onda na osnovu definicije Hessijana značiti da je za svaku dva puta neprekidno diferencijabilnu funkciju, njen Hessijan simetrična matrica.
Neka je sada M proizvoljna simetrična matrica reda $n \times n$. Za proizvoljnu matricu vrstu x (možemo reći i vektor $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$), definišimo funkciju $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$q(x) = x^T M x \ . \tag{35}$$

Funkcija q je polinom drugog reda po promjenljivima $x_1, x_2, ..., x_n$ i nazivamo je *kvadratna forma* po promjenljivima $x_1, x_2, ..., x_n$, a matricu M nazivamo *matrica kvadratne forme* q.

Primjer.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Kvadratnu formu dobijamo iz (35),

$$q_2(x) = x^T M x = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [x_1 + 2x_2 \; 2x_1 + x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 \ .$$

Tako dobivamo kvadratnu formu matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

$$q_3(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \ .$$

Definicija 14..6. Za kvadratnu formu $q(x) = x^T M x$ kažemo da je

- pozitivno poludefinitna, ako je za svako $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, zadovoljeno $q(x) \geq 0$.
- pozitivno definitna, ako je za svako $x \neq 0$, zadovoljeno $q(x) > 0$.
- negativno poludefinitna, ako je za svako $x \in \mathbb{R}^n$, zadovoljeno $q(x) \leq 0$.
- negativno definitna, ako je za svako $x \neq 0$, zadovoljeno $q(x) < 0$.
- indefinitna ili promjenljivog znaka, ako postoje $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, tako da je $q(x') > 0$ i $q(x'') < 0$.

Ako je $q(x) = 0$, često kažemo da je kvadratna forma nedefinitna u toj tački.

Primjer. Kvadratnu formu q_2 iz gornjeg primjera možemo zapisati

$$q_2(x) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 \ ,$$

pa za $x = (1, 0)$ imamo $q_2(x) = 1 > 0$, a za $x = (1, -1)$ imamo $q_2(x) = -2 < 0$. Na osnovu definicije, kvadratna forma q_2 je indefinitna.
Kvadratnu formu q_3 možemo nakon malo računa zapisati sa

$$q_3(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2 \ ,$$

pa je očigledno ova kvadratna forma pozitivno definitna odnosno, za svako $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ je $q_3(x) > 0$.

Kao što ćemo uskoro vidjeti, od velikog je interesa imati način odredjivanja definitnosti neke kvadratne forme. Najjednostavniji način bio bi obrazovati tu kvadratnu formu, a onda je svesti na neki "pogodan" oblik iz koga "lagano" možemo ocijeniti njenu definitnost (ovo smo primjenili u posljednjem primjeru).
Nadjimo taj način u za nas važnom slučaju 2×2 matrice. Neka je

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} ,$$

proizvoljna simetrična matrica. Kvadratna forma odredjena ovom matricom je

$$q(x,y) = [x\ y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 .$$

Ako je $a \neq 0$, poznatim postupkom svodjenja trinoma na kanonski oblik dobijamo

$$\begin{aligned} q(x,y) &= a\left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{det(M)}{a}y^2 . \end{aligned}$$

Sada imamo diskusiju:

1. Ako je $a > 0$ i $det(M) > 0$, tada je za svako $(x,y) \neq (0,0)$, $q(x,y) > 0$, tj. kvadratna forma je pozitivno definitna.

2. Ako je $a < 0$ i $det(M) > 0$, tada je za svako $(x,y) \neq (0,0)$, $q(x,y) < 0$, tj. kvadratna forma je negativno definitna.

3. Ako je $det(M) < 0$, tada u tačkama $(x,y) = (1,0)$ i $(x,y) = (-\frac{b}{a}, 1)$ imamo različite znakove kvadratne forme, pa je ona indefinitna.

4. Ako je $det(M) = 0$, tada imamo

   $$q(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 .$$

   Ako je $x = -\frac{b}{a}y$, onda je $q(x,y) = 0$, a u svim ostalim slučajevima ona uzima znak koga ima parametar a. Dakle, $q(x,y)$ je ili pozitivno ili negativno poludefinitan.

Jasno nam je da bi ovakav postupak odredjivanja definitosti kvadratnih formi, odredjenih matrica viših dimenzija, bio poprilično težak posao. Zato sljedećim teoremom djemo veoma jednostavan kriterij za utvrdjivanje definitnosti kvadratne forme.

Sylvesterov kriterijum

Teorem 14..7. *Neka je*

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ,$$

proizvoljna kvadratna matrica koja odredjuje kvadratnu formu $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Označimo sa* A_i *(*$i = 1, 2, ..., n$*) glavne minore matrice* M*, tj.*

$$A_1 = a_{11} \ , \ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \ \cdots \ , \ A_n = det(M) \ .$$

Kvadratna forma q je pozitivno definitna ako i samo ako su svi glavni minori pozitivni, tj. ako vrijedi

$$A_1 > 0 \ , \ A_2 > 0 \ , \ \cdots \ , \ A_n > 0 \ .$$

Kvadratna forma je negativno definitna ako i samo ako su glavni minori alternativnih znakova, tako da je $A_1 < 0$, tj. ako vrijedi

$$A_1 < 0 \ , \ A_2 > 0 \ , \ A_3 < 0 \ , \ A_4 > 0 \ , \ \cdots$$

Uobičajeno je i za matricu M reći da je pozitivno definitna, negativno definitna ili indefinitna kad god je takva kvadratna forma koja je njome odredjena.

Primjer. Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

glavni minori su $A_1 = 2 > 0$, $A_2 = 9 > 0$ i $A_3 = det(M) = 9 > 0$, pa je kvadratna forma odredjena ovom matricom pozitivno definitna.

Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} ,$$

glavni minori su $A_1 = -2 < 0$ i $A_2 = det(M) = 7 > 0$, pa je kvadratna forma negativno definitna.

Za matricu

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ,$$

glavni minori su $A_1 = -3 < 0$ i $A_2 = det(M) = -7 > 0$, pa je kvadratna forma indefinitna.

14.3. Diferencijali višeg reda

Neka je u oblasti D definisana funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ koja ima neprekidne parcijalne izvode do n-tog reda. Ranije smo vidjeli da totalni diferencijal ima oblik

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \ ,$$

gdje su dx_i ($i = 1, 2, ..., n$) priraštaji, odnosno diferencijali nezavisnih promjenljivih. Totalni diferencijal drugog reda ili kraće diferencijal drugog reda, definiše se kao diferencijal prvog diferencijala, tj.

$$d^2 f = d(df) \ .$$

Postupak odredjivanja tog diferencijala je analogan postupku za funkcije jedne varijable.

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) \ .$$

Kako je $d(dx_i) = 0$ za svako $i = 1, 2, ..., n$, to sada imamo:

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)dx_1 + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)dx_2 + ... + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)dx_n \ ,$$

odakle sada primjenjujući formulu za diferencijal funkcije imamo

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + ... + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n \ .$$

Ovaj postupak možemo generalizovati na diferencijale proizvoljnog reda, tj. imamo

$$d^{n+1} f = d(d^n f) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Na primjer, za funkciju $f(x, y)$ drugi diferencijal je dat sa

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dxdy \ .$$

15. Ekstremumi funkcija više promjenljivih

Sada ćemo naš rad iz prethodnih sekcija primjeniti na problem nalaženja minimalne i maksimalne vrijednosti funkcija više varijabli. Primjetit ćemo da je tehnika odredjivanja ekstremnih vrijednosti funkcije više varijabli veoma slična tehnici koju smo izučavali kod funkcija jedne varijable.

15.1. Teorem o ekstremnoj vrijednosti

Definicija 15..1. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definisana na skupu D_f. Kažemo da funkcija f ima maksimalnu vrijednost M u tački X_0, ako je $f(X_0) = M$ i za sve $X \in D_f$ vrijedi $f(X) \leq M$.
Kažemo da funkcija f ima minimalnu vrijednost m u tački X_0, ako je $f(X_0) = m$ i za sve $X \in D_f$, vrijedi $f(X) \geq m$.

Često maksimalnu i minimalnu vrijednost funkcije, uvedene gornjom definicijom, nazivamo *globalni maksimum* i *globalni minimum*, za razliku od pojmova lokalni maksimum i minimum, koje uvodimo sljedećom definicijom.

Definicija 15..2. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana na otvorenom skupu U. Kažemo da funkcija f ima lokalnu maksimalnu vrijednost M u tački X_0, ako je $f(X_0) = M$ i za sve $X \in B(X_0, r)$, za neko $r > 0$, vrijedi $f(X) \leq M$. Kažemo da funkcija f ima lokalnu minimalnu vrijednost m u tački X_0, ako je $f(X_0) = m$ i za sve $X \in B(X_0, r)$, za neko $r > 0$, vrijedi $f(X) \geq m$.

Često ćemo upotrebljavati i termin *globalni ekstrem* ili *globalna ekstremna vrijednost*, bilo da govorimo o globalnom maksimumu ili globalnom minimumu, a takodje i lokalni ekstrem ili *lokalna ekstremna vrijednost*, kada govorimo o lokalnom maksimumu ili minimumu.
Pozivajući se na Teorem 8..29 i Teorem 8..35 sada kao direktnu posljedicu imamo sljedeći važan teorem.

Teorem 15..3. ***Teorem o ekstremnoj vrijednosti*** *Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna na nekom otvorenom skupu U. Ako je D ograničen i zatvoren podskup skupa U, tada funkcija f dostiže maksimalnu i minimalnu vrijednost na skupu D.*

Sa gornjom teoremom imamo odličan rezultat koji nam govori o egzistenciji ekstremne vrijednosti funkcije, ali ne i kako locirati tu vrijednost. Naš sljedeći posao je pronaći kriterije za lociranje tačaka koje su kandidati u kojima će se postizati ekstremne vrijednosti, a onda i kriterije za njihovu klasifikaciju, tj. da li se u njima postiže ili ne postiže ekstrem i ako se postiže, koja je vrsta ekstrema, maksimum ili minimum.

Primjer. Ispitati postojanje i odrediti globalnu ekstremnu vrijednost funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ na skupu

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}$$

.
Kako je skup D ograničen i zatvoren, a funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}^2$, na osnovu Teoreme 15..3 zaključujemo da funkcija ima i maksimum i minimum na skupu D.

15.2. Nalaženje lokalnog ekstrema

Nalaženje lokalnog ekstrema
Za početak, posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koja je diferencijabilna na otvorenom skupu U i koja ima ekstrem u tački X_0. Neka je u proizvoljan jedinični vektor, tada će očigledno, funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa

$$\varphi(t) = f(X_0 + tu) ,$$

takodje imati ekstremnu vrijednost i to upravo za $t = 0$. Kako je φ funkcija jedne varijable, to onda mora biti

$$\varphi'(0) = 0 . \tag{36}$$

Ali u sekciji 12.1. smo vidjeli da ovaj izvod nije ništa drugo do izvod funkcije f u pravcu vektora u, tj.

$$\varphi'(0) = D_u f(X_0) . \tag{37}$$

Zaključujemo da vrijedi,

$$\varphi'(0) = D_u f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot u = 0 .$$

Skalarni produkt jednak je nuli ako je jedan od vektora tog produkta nula-vektor ili ako su vektori ortogonalni. Ortogonalnost otpada jer gornje vrijedi za proizvoljan jedinični vektor u. Koristeći proizvoljnost vektora u, uzmimo specijalno vektore baze. Tada imamo

$$\nabla f(X_0) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0 \ ,$$

za $i = 1, 2, ..., n$. Ovo znači da mora biti $\nabla f(X_0) = 0$. Primjetimo da ovo znači i to da je nagib grafa funkcije f jednak 0 u tački X_0, u pravcima svih baznih vektora. Medjutim, to znači mnogo više naime, nagib grafa je 0 u svim pravcima u jer je $D_u f(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot u$. Ovo razmatranje sumiramo teoremom.

Teorem 15..4. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na otvorenom skupu U i neka ima lokalnu ekstremnu vrijednost u tački $X_0 \in U$, tada je $\nabla f(X_0) = 0$.*

Kako je totalni diferencijal funkcije jednak umnošku gradijenta i diferencijala argumenta, tj.

$$df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X)dx_2 + \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n = \nabla f(X) \cdot dX \ ,$$

to onda za diferencijabilnu funkciju koja ima ekstremnu vrijednost u tački X_0, vrijedi

$$df(X_0) = 0 \ ,$$

a takvu situaciju smo imali i kod funkcije jedne varijable jer je neophodan uslov bio $f'(x) = 0$, a vrijedilo je $df(x) = f'(x)dx$. Teorem 15..4 nam daje neke od tačaka koje su kandidati za ekstreme, ali ne i sve. Naime, vrijedi.

Teorem 15..5 (Potrebni uslovi za ekstrem)**.** *Ako funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima ekstrem u tački X_0, tada vrijedi, ili je $\nabla f(X_0) = 0$ ili prvi parcijalni izvodi funkcije u tački X_0 ne postoje.*

Dakle, kandidati za ekstremnu vrijednost su sve one tačke u kojima je gradijent jednak 0 i sve one u kojima funkcija nije diferencijabilna. Ovo nas navodi da ove tačke definišemo precizno.

Definicija 15..6. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački X_0 i neka je $\nabla f(X_0) = 0$. Tada tačku X_0 nazivamo stacionarnom tačkom funkcije f. Tačke u kojima funkcija f nije diferencijabilna, nazivamo singularnim tačkama funkcije f.

Često se za obje gore pomenute vrste tačaka kaže da su *kritične tačke* funkcije.

Primjer. Funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ je diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^2$ i $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. Jedine kandidate za ekstremne vrijednosti dobijamo rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \ . \end{aligned}$$

Dakle, jedina kritična tačka je stacionarna tačka $X_0(0, 0)$.

Primjer. Funkcija $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ je diferencijabilna i $\nabla f(x, y) = (-2x, -2y)$. Rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ -2y &= 0 \ , \end{aligned}$$

dobijamo stacionarnu tačku $X_0(0, 0)$.

Primjer. Za funkciju $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, gradijent je $\nabla f(x,y)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$. Parcijalni izvodi ne postoje u tački $X_0(0,0)$ i to je jedina kritična tačka funkcije f.

Primjer. Funkcija $f(x,y)=x^2-y^2$ ima gradijent $\nabla f(x,y)=(2x,-2y)$, pa je jedina kritična tačka, stacionarna tačka $X_0(0,0)$.

Sada kada smo u mogućnosti utvrditi postojanje ekstremne vrijednosti funkcije (Teorem 15..3) i identifikovati kandidate za te vrijednosti (Teorem 15..5) ostaje nam pronaći kriterije za utvrdjivanje da li ti kandidati jesu ekstremi i klasificirati ih. Prisjetimo se funkcija jedne varijable, da je jedan od kriterija za identifikaciju lokalnih ekstrema bio test drugog izvoda.
Naime, ako je c bila stacionarna tačka funkcije $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tada ako je $\varphi''(c)>0$, funkcija je imala minimum u c, a ako je $\varphi''(c)<0$, funkcija je imala maksimum u tački c. Taylorov polinom nam na najvidljiviji način pokazuje zašto je to tako. Naprimjer, neka je c stacionarna tačka funkcije φ i neka je $\varphi''(c)$ neprekidna na otvorenom intervalu koji sadrži c, i neka je $\varphi''(c)>0$. Tada za neko $\varepsilon>0$, postoji interval $I=(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ na kome je $\varphi''(c)$ neprekidna i $\varphi''(t)>0$, za sve $t\in I$. Na osnovu Taylorove teoreme, za proizvoljno h, takav da je $|h|<\varepsilon$, postoji $s\in(c,c+h)$, takav da je

$$\varphi(c+h)=\varphi(c)+\varphi'(c)h+\frac{1}{2}\varphi''(s)h^2\ . \tag{38}$$

Zbog stacionarnosti je $\varphi'(c)=0$. Takodje smo imali $\varphi''(s)>0$, pa koristeći to u (38) dobijamo da je za proizvoljno h, $|h|<\varepsilon$, zadovoljeno

$$\varphi(c+h)>\varphi(c)\ ,$$

a ovo znači da je u tački c lokalni minimum. Veoma slično razmatranje sada možemo sprovesti i za funkciju $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Na osnovu Teorema 14..4 znamo da vrijedi formula

$$f(A+h)=f(A)+\nabla f(A)\cdot h+\frac{1}{2}h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h\ ,$$

gdje je f dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tačke A i $\xi\in(0,1)$. Neka je sada A stacionarna tačka funkcije f i neka je Hesijan $\mathbf{H}f(X)$ pozitivno definitna matrica u nekoj kugli $B(A,r)$. Tada je $\nabla f(A)=0$, pa vrijedi

$$f(A+h)=f(A)+\frac{1}{2}h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h\ ,$$

a kako je još $A+\xi h\in B(A,r)$, to je kvadratna forma $h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h>0$. te imamo

$$f(A+h)>f(A)\ ,$$

za proizvoljno h, tako da je $||h||<r$. Ali ovo onda upravo znači da funkcija f ima lokalni minimum u tački A. Istim argumentima bi rezonovali da smo pretpostavili negativnu definitnost Hesijana i naravno, zaključili bi da funkcija ima lokalni maksimum u tački A. Ako je Hesijan indefinitan, to bi značilo da postoji proizvoljno malen h, tako da je kvadratna forma

$$h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h>0\ ,$$

i takodje proizvoljno malen h da je

$$h^T\mathbf{H}f(A+\xi h)h<0\ .$$

Ovo bi onda uzrokovalo da za neke proizvoljno malene h vrijedi $f(A+h) > f(A)$, a istovremeno za neke druge proizvoljno malene h je $f(A+h) < f(A)$. U ovom slučaju jasno je da u tački A nemože biti niti lokalni minimum niti lokalni maksimum. Tada bi tačka A predstavljala tzv. *sedlastu tačku* funkcije f.
Na osnovu gornjeg, sada možemo iskazati dovoljne uslove za ekstremnu vrijednost funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorem 15..7 (Test druge derivacije)**.** *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $f \in C^2(U)$, gdje je U otvoren skup. Ako je $A \in U$ stacionarna tačka funkcije f, tada je*

1. *$f(A)$ lokalni minimum funkcije f, ako je $\mathbf{H}f(A)$ pozitivno definitna matrica.*
2. *$f(A)$ lokalni maksimum funkcije f, ako je $\mathbf{H}f(A)$ negativno definitna matrica.*
3. *tačka A sedlasta tačka funkcije f, ako je $\mathbf{H}f(A)$ indefinitna matrica.*

Ukoliko je $\mathbf{H}f(A)$ nedefinitna matrica, potrebna su dodatna ispitivanja za klasifikaciju tačke A.

Primjer. Odrediti lokalne ekstremne vrijednosti funkcije $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.
Nalazimo prvo gradijent

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(y - 2x^2y, x - 2xy^2)\ .$$

Kako je $e^{-x^2-y^2} > 0$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, činjenica da je $\nabla f(x,y) = (0,0)$, svodi se na sistem

$$\begin{aligned} y(1-2x^2) &= 0\ , \\ x(1-2y^2) &= 0\ . \end{aligned}$$

Prva jednačina će biti tačna ako je $y = 0$ ili $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ili $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ako je $y = 0$, onda iz druge jednačine vidimo da mora biti i $x = 0$, a time smo dobili prvu stacionarnu tačku $M_1(0,0)$.

Ako je $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, onda je druga jednačina zadovoljena ako je $1 - 2y^2 = 0$, odnosno ako je $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ili $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, pa na taj način dobijamo još četiri stacionarne tačke: $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ i $M_5(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Drugi korak u rješavanju problema ovog tipa je odredjivanje hesijana funkcije

$$\mathbf{H}f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left[\begin{array}{cc} 4x^3y - 6xy & 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \\ 4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 & 4y^3yx - 6xy \end{array}\right]\ .$$

Sada nakon kraćeg računa dobijamo

$$\mathbf{H}f(M_2) = \mathbf{H}f(M_5) = e^{-1}\left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right]\ .$$

Kako je $A_1 = -2e^{-1} < 0$ i

$$A_2 = det\left[\begin{array}{cc} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{array}\right] = 4e^{-1} > 0\ ,$$

na osnovu testa druge derivacuje zaključujemo da funkcija u tačkama M_2 i M_5 ima lokalni maksimum, i pri tome je $f(M_2) = f(M_5) = f_{\max} = \frac{1}{2}e^{-1}$.

Dalje imamo

$$\mathbf{H}f(M_3) = \mathbf{H}f(M_4) = e^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

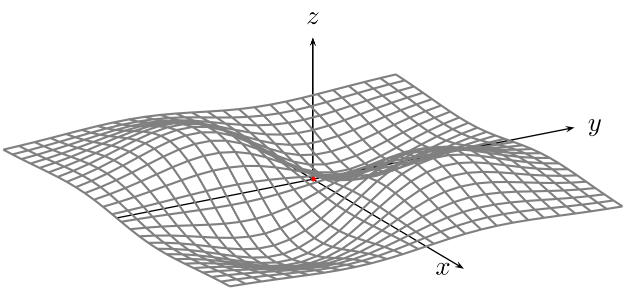
Sada je $A_1 = 2e^{-1} > 0$ i

$$A_2 = det\begin{bmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{bmatrix} = 4e^{-1} > 0 ,$$

pa opet na osnovu testa druge derivacije zaključujemo da funkcija u tačkama M_3 i M_4 ima lokalni minimum i pri tome je $f(M_3) = f(M_4) = f_{\min} = -\frac{1}{2}e^{-1}$.
Ostala nam je još tačka $M_1(0,0)$ u kojoj je

$$\mathbf{H}f(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Sada je $A_1 = 0$ i $A_2 = -1$, pa je Hesijan indefinitan, a to znači da je tačka $M_1(0,0)$ sedlasta tačka.



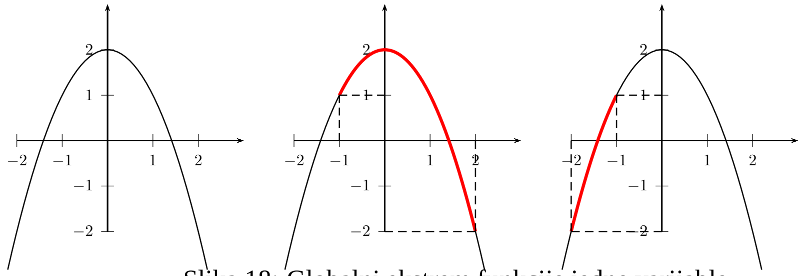
Slika 17: Graf funkcije $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

15.3. Nalaženje globalnog ekstrema

Nalaženje globalnog ekstrema
Posmatrajmo funkciju $f(x) = 2 - x^2$. Posmatramo li je na čitavom $\mathbb{R}$, ona ima lokalni maksimum u tački $x = 0$, koji je i globalni maksimum, a globalnog minimuma nema (slika lijevo).
Ako je posmatramo na skupu $[-1, 2]$ i dalje je globalni maksimum u $x = 0$, ali sada je globalni minimum u tački $x = 2$ (slika u sredini). Ako je posmatramo za vrijednosti iz $[-2, -1]$, njen globalni minimum je u $x = -2$, a globalni maksimum je u $x = -1$ (slika desno).
Dakle, globalni ekstrem funkcije direktno zavisi od područja na kom tu funkciju posmatramo.
Nešto slično imamo i kod funkcija više promjenljivih.

Primjer. Odrediti globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2$ na skupu

$$D = \left\{(x,y) |\; x^2 + 4y^2 \le 4\right\} .$$



Slika 18: Globalni ekstrem funkcije jedne varijable

Skup D je zatvoren i ograničen, pa na osnovu Teoreme 15..3, funkcija f dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost. Kako je funkcija diferencijabilna (kao polinomijalna funkcija), njene jedine kritične tačke su stacionarne tačke, koje dobijamo iz uslova

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 0 \ .$$

U tački $(0,0)$ je moguć lokalni ekstrem funkcije ali moramo sada posmatrati šta se dogadja sa našom funkcijom na rubu oblasti D, tj. na skupu

$$\partial D = \left\{(x,y) |\ x^2 + 4y^2 = 4\right\} \ .$$

S obzirom da su na ∂D nezavisne varijable vezane relacijom $x^2 + 4y^2 = 4$, uvodeći polarne koordinate, tj. smjene $x(t) = 2\cos t$ i $y(t) = \sin t$, gje je $t \in [0, 2\pi]$, naša funkcija f postaje funkcija jedne varijable

$$\begin{aligned} g(t) = f(x(t), y(t)) &= f(2\cos t, \sin t) \\ &= 4\cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 3\cos^2 t + 1 \ , \end{aligned}$$

gdje je $t \in [0, 2\pi]$. Ekstremne vrijednosti funkcije g će biti i ekstremne vrijednosti funkcije f. Zato posmatrajmo jednačinu

$$g'(t) = -6\cos t \sin t = 0 \ .$$

Stacionarne tačke će biti $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ i $t = 2\pi$. Dakle, pored tačke $(0,0)$ imamo još četiri kandidata za globalni ekstrem, a to su tačke $(2,0)$, $(0,1)$, $(-2,0)$ i $(0,-1)$, odredjene gornjim vrijednostima za t. Izračunavajući sada vrijednost funkcije u svakoj od ovih pet tačaka, odredjujemo globalne ekstreme.

$$f(0,0) = 0 \ , \ f(2,0) = 4 \ , \ f(0,1) = 1 \ , \ f(-2,0) = 4 \ , \ f(0,-1) = 1 \ .$$

Uporedjujući gornje vrijednosti, zaključujemo da funkcija f ima globalnu maksimalnu vrijednost 4 u tačkama $(2,0)$ i $(-2,0)$ i globalnu minimalnu vrijednost 0 u tački $(0,0)$. Kao što nam pokazuje upravo uradjeni primjer, za funkciju zadatu na zatvorenoj i ograničenoj oblasti odredjivanje globalnih ekstrema se svodi na to da pronadjemo lokalne ekstreme i ekstreme funkcije na rubu te oblasti, a onda odredjujemo šta će biti globalne ekstremne vrijednosti.
Ako funkciju ne posmatramo na zatvorenoj i ograničenoj oblasti, onda se problem odredjivanja globalnih ekstrema svodi na to da pronadjemo lokalne ekstreme, a onda nekom metodom ispitamo da li su oni ujedno i globalni ekstremi.

Primjer. U nekoj firmi žele da naprave pravougaonu posudu bez krova, zapremine 500 m^3 i da pritome utroše što je manje moguće materijala.
Označimo sa x i y dužine stranica te posude u osnovi i sa z visinu te posude (sve veličine su izražene u metrima), tada u stvari treba pronaći minimalnu vrijednost funkcije

$$M'(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \ ,$$

pri čemu zapremina mora biti $xyz = 500$. Izražavajući z iz ove jednakosti i uvrštavanjem u funkciju M', dobijamo funkciju

$$M(x,y) = xy + \frac{1000}{y} + \frac{1000}{x} \ ,$$

kojoj treba odrediti minimalnu vrijednost na beskonačnom pravougaoniku

$$R = \{(x,y)|\ x > 0 \ , \ y > 0\} \ .$$

Rješavanjem sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= y - \frac{1000}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= x - \frac{1000}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

dobijamo jedinu stacionarnu tačku $A(10,10)$. Hesijan funkcije M glasi

$$\mathbf{H}M(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2000}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2000}{y^3} \end{bmatrix} \ ,$$

odnosno

$$\mathbf{H}M(10,10) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Kako je $det(\mathbf{H}M(10,10)) = 3$, zaključujemo da je Hesijan pozitivno definitan, a to znači da funkcija M ima lokalni minimum u tački $A(10,10)$ i pri tome je

$$M_{\min} = M(10,10) = 10 \cdot 10 + \frac{1000}{10} + \frac{1000}{10} = 300 \ .$$

Ostaje nam ispitati da li je ovo i globalni minimum funkcije M? Ako je bilo koja varijabla manja od jedan, tj. $0 < x < 1$ ili $0 < y < 1$, tada je $\frac{1000}{x} > 1000$, odnosno $\frac{1000}{y} > 1000$, pa je očigledno vrijednost funkcije M veća od 300. Ako je sada $x \geq 400$ i $y \geq 1$, onda je $xy \geq 400$, pa bi opet vrijednosti naše funkcije bile veće od 300 (analogno i slučaj $y \geq 400$ i $x \geq 1$). Dakle, ako posmatramo skup

$$D = \{(x,y)|\ 1 \leq x \leq 400 \ , \ 1 \leq y \leq 400\} \ ,$$

izvan skupa D vrijednosti funkcije M su veće od 300. Na skupu D naša funkcija ima globalni minimum u tački $(10,10)$, pa je to onda očigledno globalni minimum funkcije na čitavom skupu R.
Ostaje samo jos zaključiti da je tada

$$z = \frac{500}{10 \cdot 10} = 5 \ ,$$

odnosno da posuda treba biti dimenzija $10 \times 10 \times 5$, da bi imala odgovarajuću zapreminu i da bi imali minimalne troškove.

15.4. Uslovni ekstrem

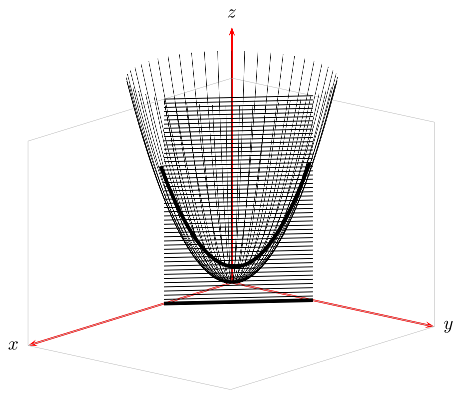
U prethodnim primjerima nalazili smo ekstremne vrijednosti funkcije pod restrikcijom na podskup koji je manje dimenzije. U prvom primjeru smo ekstremizirali funkciju $f(x, y) = x^2 + y^2$ sa restrikcijom na jednodimenzionalnoj elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$. U drugom primjeru smo ekstremizirali funkciju tri varijable $M'(x, y, z) = xy+2xz+2yz$ sa restrikcijom na trodimenzionalnu površ $xyz = 500$.
U prvom smo primjeru problem riješili tako što smo parametrizovali elipsu, a zatim smo ekstremizirali funkciju jedne varijable. U drugom smo izrazili z kao funkciju od x i y, a zatim smo ekstremizirali funkciju dvije varijable. U ovoj sekciji ćemo dati generalni metod za rješavanje oba ova ali i drugih sličnih problema. U osnovnom slučaju ekstremizacija, zadata je neka (diferencijabilna) funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koju želimo naći ekstremne vrijednosti. Taj problem smo rješavali nalaženjem svih kritičnih tačaka funkcije, a onda testom druge derivacije ispitivali karakter tih tačaka.
Medjutim, kao što smo vidjeli u Primjeru 464, nekada treba izvršiti ekstremizaciju funkcije, pri čemu su nezavisne varijable te funkcije vezane nekim uslovom, tj. tražimo ekstremnu vrijednost funkcije $f(x_1, x_2, ..., x_n) = y$, pri uslovu $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Ovakvu vrstu ekstremizacije nazivamo *uslovna ekstremizacija*.

Primjer. Neka treba odrediti minimum funkcije $z = x^2 + y^2$ pri uslovu $x + y = 1$, tj.

$$x^2 + y^2 \longrightarrow min$$

$$x + y - 1 = 0 \, .$$

Očigledni minimum funkcije, bez uslova , je u tački $(0, 0)$ i vidimo da ta tačka ne zadovoljava uslov $x + y = 1$. Šta geometrijski predstavlja uslov u gornjem problemu?



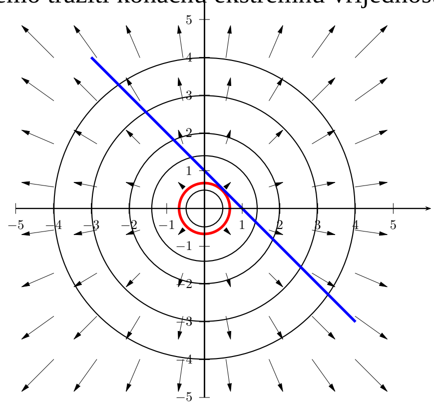
Slika 19: Uslovni ekstrem

Graf funkcije $z = x^2 + y^2$ je paraboloid, a uslov $x + y = 1$ predstavlja jednačinu ravni u $\mathbb{R}^3$. Dakle, mi tražimo minimalnu vrijednost na paraboloidu ali samo u onim tačkama u kojima se sijeku paraboloid (ciljna funkcija) i ravan (uslovna funkcija). Sa slike vidimo da se traži minimum funkcije koja predstavlja parabolu u prostoru $\mathbb{R}^3$. Zaista, koristeći uslovnu funkciju, možemo izraziti jednu varijablu, npr. $y = 1 - x$, pa stavljajući to u izraz ciljne funkcije imamo,

$$z = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 \, ,$$

a ovo je zaista jednačina parabole. Sada minimum ove funkcije nalazimo kao problem ekstremizacije funkcije jedne vaerijable. $z' = 4x - 2$, pa imamo jednu stacionarnu tačku $x_0 = \frac{1}{2}$. Kako je $z'' = 4$, dakle pozitivan, to u tački x_0 funkcija ima minimum. Izračunavajući $y_0 = 1 - x_0 = \frac{1}{2}$, zaključujemo da funkcija $z = x^2 + y^2$ ima minimum u tački $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, pri uslovu $x + y = 1$.

Gornji primjer nam daje jedan metod za rješavanje problema uslovne ekstremizacije, ali jasno je da će primjena ovog metoda biti kudikamo složenija, za malo složenije uslovne funkcije. Zato nam je u interesu imati i neki drugi metod, a najopštiji od svih je tzv. *Lagrangeov metod*, koga ćemo sada izložiti.
Šta će biti motivacija za ovaj metod? Posmatrajmo ponovo gornji primjer i konturnu sliku grafova ciljne i uslovne funkcije. Nivo linije funkcije $z = x^2 + y^2$ predstavljaju koncentrične centralne kružnice ($x^2 + y^2 = k$), a uslovna funkcija zbog svog položaja (ortogonalna na xOy ravan), predstavljena je pravom linijom u xOy ravni. Na slici uočavamo da prava neke od konturnih linija siječe, neke nivo linije neće uopšte sjeći ali da samo jednu nivo liniju dodiruje.
Strelice na slici nam pokazuju pravce rasta ciljne funkcije (gradijentni vektor u različitim tačkama), a time je onda odredjeno da nivo linije paraboloida bliže koordinatnom početku, odgovaraju manjim vrijednostima funkcije (u opštem slučaju ovo nije pravilo). Ovo onda znači da upravo ona nivo linija koja se dodiruje sa uslovnom funkcijom predstavlja bitan momenat. Naime, tačke na onim nivo linijama koje se ne sijeku sa uslovnom funkcijom i nemogu biti kandidati za uslovne ekstreme, a jasno je da od momenta kada prava presječe jednu od nivo linija, sjeći će i svaku "veću" nivo liniju, pa dakle tu i nemožemo tražiti konačnu ekstremnu vrijednost. Naravno, tražiti nivo



Slika 20: Nivo linije funkcije $z = x^2 + y^2$ sa uslovnom funkcijom $x + y = 1$

liniju zadate površi koja će dodirivati uslovnu funkciju ne bi bio lagan posao. Zato se prisjetimo da je ugao izmedju dvije krive koje se sijeku, jednak uglu izmedju njihovih tangenti u presječnoj tački. Dakle, ako se dvije linije dodiruju, onda se njihove tangente u dodirnoj tački poklapaju, ili drugagačije iskazano, vektori normala na tim tangentama su paralelni. Kako je gradijentni vektor upravo onaj vektor koji je ortogonalan na nivo liniju u proizvoljnoj tački, a uslov paralelnosti vektora je uslov njihove kolinearnosti, zaključujemo da mi treba da odredimo upravo one tačke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima vrijedi

$$\nabla(x^2 + y^2) = \lambda \nabla(x + y - 1) .$$

Zbog paralelnog pomjeranja, takvih vektora bi bilo beskonačno mnogo. Medjutim, mi tražimo tačke na uslovnoj krivoj koje to zadovoljavaju, tj. nalazimo tačke (x, y) koje zadovoljavaju

$$\nabla(x^2+y^2)=\lambda\nabla(x+y-1) \text{ i}$$

$$x+y-1=0\ .$$

Generalno, ako rješavamo problem

$$f(X)\ \longrightarrow\ ext$$

$$g(X)=0\ ,$$

rješenje će biti u onim tačkama $X(x_1,x_2,...,x_n)$ u kojima su zadovoljeni uslovi

$$\nabla f(X)=\lambda\nabla g(X) \tag{39}$$

$$g(X)=0\ . \tag{40}$$

Izloženi metod se naziva *Lagrangeov metod*, a nova varijabla $\lambda\in\mathbb{R}$ koja se pojavljuje u uslovu (39), naziva se *lagrangeov multiplikator*. Ako uvedemo funkciju

$$\Lambda(X,\lambda)=f(X)-\lambda g(X)\ , \tag{41}$$

koju nazivamo *Lagrangeova funkcija* ili *lagranžijan*, nije teško uočiti da su uslovi (39) i (40), ekvivalentni uslovu

$$\nabla\Lambda(X,\lambda)=0\ . \tag{42}$$

Zaista, nalazeći parcijalne izvode po promjenljivima x_i $(i=1,2,...,n)$ imamo

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}\ ,\ i=1,2,...,n\ .$$

Sada zbog (42), zaključujemo da je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_i}=0\ ,$$

za sve $i\in\{1,2,...,n\}$, tj. vrijedi uslov (39).
Kako je

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}=-g(X)\ ,$$

opet zbog (42) imamo

$$g(X)=0\ ,$$

odnosno uslov (40). Na ovaj način smo praktično dali i opis postupka rješavanja uslovne ekstremizacije oblika

$$f(X)\ \longrightarrow\ ext$$

$$g(X)=0\ .$$

1. Prvo formiramo lagranžijan

$$\Lambda(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,...,x_n)-\lambda g(x_1,x_2,...,x_n)\ ,$$

2. Odredjujemo $\nabla\Lambda(x_1,x_2,...,x_n,\lambda)$.

3. Rješavamo jednačinu $\nabla\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = 0$, tj. sistem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\
\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \\
\cdots\cdots & \cdot\cdot \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial\Lambda}{\partial x_n} &= \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_n} = 0 \\
\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda} &= -g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0\ .
\end{aligned}$$

Rješenja posljednjeg sistema su stacionarne tačke lagranžijana i ostaje nam još samo utvrditi karakter tih tačaka.
Primjetimo odma, da će u pronadjenim stacionarnim tačkama X^*, biti

$$\Lambda(X^*, \lambda) = f(X^*)\ ,$$

(jer je $g(X^*) = 0$) tj. ekstremi lagranžijana ujedno su i ekstremi naše ciljne funkcije. Zato za ispitivanje karaktera tih tačaka možemo primjeniti test druge derivacije ili ispitivanjem drugog diferencijala ciljne funkcije. Naime, ako je $d^2f(X^*) > 0$, imamo minimum, a ako je $d^2f(X^*) < 0$ imamo maksimum ciljne funkcije sa zadatim uslovom. Ako je $d^2f(X^*) = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja za odredjivanje karaktera te tačke.

Primjer. Riješiti problem

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \ \longrightarrow\ ext$$
$$x + y = 1\ .$$

Kao što smo rekli, formiramo prvo lagranžijan

$$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 1)\ ,$$

gdje je sa $g(x,y) = x + y - 1$ zadata uslovna funkcija. U drugom koraku računamo gradijent lagranžijana

$$\nabla\Lambda(x,y,\lambda) = \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x}, \frac{\partial\Lambda}{\partial y}, \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda}\right) = (2x - \lambda, 2y - \lambda, x + y - 1)\ .$$

Sada rješavamo sistem

$$\begin{aligned}
2x - \lambda &= 0 \\
2y - \lambda &= 0 \\
x + y - 1 &= 0\ .
\end{aligned}$$

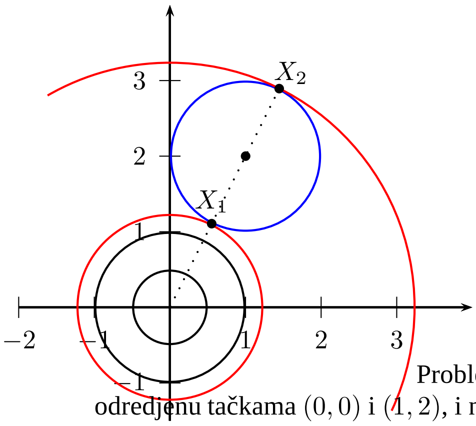
Iz prve dvije jednačine sistema imamo $2x = 2y$, tj. $x = y$, pa uvrštavajući to u treću jednačinu, dobijamo $x = y = \frac{1}{2}$ i za ove vrijednosti je $\lambda = 1$. Dakle, imamo jednu stacioarnu tačku $X_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Posljedni korak je utvrdjivanje karaktera tačke X_0. Računajući druge parcijalne izvode, imamo

$$d^2f(X_0) = 2dx^2 + 2dy^2\ ,$$

i vidimo da je $d^2f(X_0) > 0$ (kao suma kvadrata), te dakle imamo minimum funkcije f, pri uslovu g, u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, i on iznosi $f_{min} = \frac{1}{2}$.

Primjer. Odrediti na kružnici $k:\ (x-1)^2+(y-2)^2=1$ najbližu i najdalju tačku od koordinatnog početka.



Problem možemo riješiti jednostavno, povlačeći pravu odredjenu tačkama $(0,0)$ i $(1,2)$, i nalazeći njen presjek sa zadatom kružnicom. Riješimo problem ipak na "teži" način. Razmišljajmo ovako: ako opišemo centralnu kružnicu proizvoljnog poluprečnika r, onda ona na sebi sadrži sve one tačke koje su na istom odstojanju r od koodinatnog početka.

"Naduvajmo" neku malu centralnu kružnicu, sve do momenta njenog dodira sa zadatom kručnicom k. Tačka dodira će upravo biti najbliža tačka koordinatnom početku. Ako nastavimo "naduvavanje", kružnice će sjeći kružnicu k ali tu nemamo tačaka koje su najbliže ili najdalje jer su sve one dalje od prve dodirne tačke, a naduvavanjem dobijamo sve dalje i dalje tačke. Ovo naravno vrijedi do momenta kada ponovo dobijemo kružnicu koja dodirne kružnicu k (velika crvena kružnica).

Cijeli opisani postupak nas navodi da problem postavimo ovako: nadjimo minimum i maksimum funkcije $f(x,y)=x^2+y^2$ (to su centralne kružnice čije poluprečnike tražimo) pri uslovu $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ (na ovoj kružnici tražimo najbližu i najdalju tačku). Dakle, rješavamo

$$x^2+y^2 \longrightarrow ext$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=1\ .$$

Lagranžijan problema je $\Lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda((x-1)^2+(y-2)^2-1)$, a njegov gradijent, $\nabla\Lambda=(2x-2\lambda(x-1),2y-2\lambda(y-1),(x-1)^2+(y-2)^2-1)$. Rješavamo sistem

$$\begin{aligned} 2x-2\lambda(x-1) &= 0\\ 2y-2\lambda(y-1) &= 0\\ (x-1)^2+(y-2)^2-1 &= 0\ . \end{aligned}$$

Stacionarne tačke su $X_1\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}},2+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ i $X_2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}},2-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Prostom provjerom zaključujemo da funkcija u ovim tačkama ima najveću i najmanju vrijednost, odnosno da su to najdalja i najbliža tačka koordinatnom početku, na kružnici k.
Vratimo se na opasku "teži" način rješavanja. Postavimo problem da na proizvoljnoj liniji $g(x,y)=0$ nadjemo najbližu ili najdalju tačku od koordinatnog početka. Sada onaj "lakši" način uopšte nemožemo primjeniti, a ovaj "teži" funkcioniše. Dakle, on

je univerzalnijeg karaktera i kao takav mnogo bolji način. Npr. naći na grafu funkcije $y = x^2 + x + 1$ tačku najbližu koordinatnom početku.

U prethodna dva primjera vidjeli smo kako funkcioniše Lagrangeov metod, pri čemu smo imali samo jedno oganičenje, a time i jednu dodatnu varijablu problema. Naravno da ograničenja može biti i više, medjutim metod se bitno neće mijenjati. Naime, neka je zadat problem sa dva ograničenja.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow ext$$

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ ,$$

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ .$$

Formiramo lagranžijan, tako da svakom ograničenju pridružimo po jedan lagrangeov multiplikator,

$$\Lambda(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda, \mu) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda h(x_1, x_2, ..., x_n) - \mu g(x_1, x_2, ..., x_n) \ .$$

Nalaženjem gradijenta lagranžijana, postavljamo sistem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \ , \ i = 1, 2, ..., n \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} &= h(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

čijim rješavanjem dobijamo stacionarne tačke problema. Kao i u slučaju jednog ograničenja, nekim od poznatih postupaka odredimo karakter stacionarnih tačaka. U opštem slučaju, ako imamo k ograničenja $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, postupak je isti, a lagranžijan je

$$\Lambda(X, \lambda) = f(X) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(X) \ , \ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \ .$$

Primjer. Riješimo problem

$$f(x, y, z) = 4y - 2z \longrightarrow ext$$

$$2x - y - z - 2 = 0 \ ,$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \ .$$

Za egzistenciju rješenja gornjeg problema pozivamo se na Teorem 15..3. Zaista, zbog drugog ograničenja, očigledno je da vrijedi $0 \leq x, y \leq 1$, a iz prvog ograničenja onda zaključujemo da je $-3 \leq z \leq 0$, pa je skup na kome tražimo ekstremne vrijednosti funkcije ograničen i zatvoren.

Lagranžijan glasi

$$\Lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = 4y - 2z - \lambda(2x - y - z - 2) - \mu(x^2 + y^2 - 1) \ .$$

Nalazimo parcijalne izvode lagranžijana

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda}{\partial x} &= -2\lambda - 2\mu x \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial y} &= 4 - \lambda - 2\mu y \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial z} &= -2 - \lambda \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} &= -2x + y + z + 2 \\
\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu} &= -x^2 - y^2 + 1 \ .
\end{aligned}
$$

Sistem koga rješavamo ima pet nepoznatih (x, y, z, λ, μ) i pet jednačina

$$
\begin{aligned}
-2\lambda - 2\mu x &= 0 \\
4 + \lambda - 2\mu y &= 0 \\
-2 + \lambda &= 0 \\
-2x + y + z + 2 &= 0 \\
-x^2 - y^2 + 1 &= 0 \ .
\end{aligned}
$$

Iz treće jednačine direktno slijedi $\lambda = 2$. Ubacujući to u prvu i drugu jednačinu, dobijamo

$$x = -\frac{2}{\mu} \ , \ y = \frac{3}{\mu} \ .$$

Stavljajući ove rezultate u petu jednačinu, imamo

$$\frac{4}{\mu^2} + \frac{9}{\mu^2} = \frac{13}{\mu^2} = 1 \implies \mu = \pm\sqrt{13} \ .$$

Sada imamo dva slučaja. Za $\mu = \sqrt{13}$, $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ i $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Iskoristimo li i četvrtu jednačinu, dobijamo $z = -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}$. Time smo dobili prvu stacionarnu tačku

$$X_1(x, y, z, \lambda, \mu) = X_1(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}, 2, \sqrt{13}) \ .$$

Analogno, za slučaj $\mu = -\sqrt{13}$, dobijamo stacionarnu tačku

$$X_2(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}, 2, -\sqrt{13}) \ .$$

Lako se sada provjerava da u tački X_1 imamo maksimum

$$f_{max} = f(X_1) = 4 + \frac{26}{\sqrt{13}} \ ,$$

a minimum u tački X_2

$$f_{min} = f(X_2) = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} \ .$$

16. Višestruki integrali

Višestruki integrali
Posmatrajmo proizvoljnu zatvorenu oblast $\overline{D}$ n-dimenzionalnog euklidskog prostora. Sa $mes(\overline{D})$ ćemo označavati mjerni broj veličine oblasti $\overline{D}$ (u slučaju dvodimenzionalne oblasti to je površina, za trodimenzionalnu oblast to je zapremina).

Definicija 16..1. Podjelu oblasti $\overline{D}$ nazivamo pravilnom ako se sastoji od dijelova (ćelija) te oblasti koji zadovoljavaju sljedeće osobine:

1. svaka ćelija je ograničena i ima ograničenu veličinu,
2. Dvije različite ćelije nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Zajedničke tačke dviju različitih ćelija mogu biti samo granične tačke tih ćelija,
3. svaka tačka oblasti $\overline{D}$ pripada bar jednoj ćeliji,
4. svaka ograničena figura koja sa svojom granicom leži u oblasti $\overline{D}$ može se sastojati iz konačnog broja ćelija.

Definicija 16..2. Ćeliju jedne podjele nazivamo δ-ćelijom ako oko nje možemo opisati sferu prečnika δ. Pravilna podjela se naziva δ-podjelom ako je svaka njena ćelija δ-ćelija.

Jasno je da su u jednoj δ-ćeliji bilo koje dvije tačke na rastojanju manjem ili jednakom δ. Podjele ćemo ozanačavati uobičajeno sa σ. Različite podjele iste oblasti mogu se porediti ili biti neuporedive.

Definicija 16..3. Podjela σ_2 je produženje podjele σ_1 ako pri prelazu na podjelu σ_2 svaka ćelija podjele σ_1 ostaje nepromjenjena ili se dijeli novom pravilnom podjelom. Takodje kažemo u tom slučaju da je podjela σ_2 finija od podjele σ_1.

Integralne sume

Definicija 16..4. Neka je $\overline{D}$ proizvoljna zatvorena oblast i σ neka njena pravilna podjela. Neka je funkcija $f(X)$ ograničena na $\overline{D}$. Integralnom sumom funkcije f u oblasti $\overline{D}$ nazivamo svaku sumu oblika

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) mes(\sigma_i) \ ,$$

gdje su σ_i $(i = 1, ..., n)$ ćelije podjele σ, $X_i \in \sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proizvoljne tačke.

Uporedo sa integralnim sumama funkcije f posmatrat ćemo i tzv. gornje i donje integralne sume

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i mes(\sigma_i) \ \text{ i } \ \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i mes(\sigma_i)$$

gdje su

$$m_i = \inf_{X \in \sigma_i} f(X) \ , \ M_i = \sup_{X \in \sigma_i} f(X) \ , (i = 1, 2, ..., n) \ .$$

Ove sume nazivamo takodje i gornja odnosno donja Darbouxova suma.
Za integralne sume vrijede sljedeća tvrdjenja:

Teorem 16..5. *Pri produženju podjele oblasti gornja suma ne raste, a donja suma ne opada.*

Teorem 16..6. *Donja suma je manja ili jednaka od gornje sume za proizvoljnu podjelu oblast.*

Teorem 16..7. *Za integralne sume vrijedi*

$$m\, mes(\overline{D}) \leq \underline{S} \leq S \leq \overline{S} \leq M mes(\overline{D}) \ ,$$

gdje je $m = \inf_{X \in \overline{D}} f(X)\ ,\ M = \sup_{X \in \overline{D}} f(X)$.

Primjer. Za funkciju dvije promjenljive integralna suma je oblika

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) mes(\sigma_i) \ ,$$

gdje je $X_i(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$ ($i = 1, 2, ..., n$).

16.0.1. Definicija višestrukog integrala

Definicija višestrukog integrala
Neka je $S = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) mes(\sigma_i)$, integralna suma funkcije $f(X)$ u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$.

Definicija 16..8. Broj I nazivamo višestrukim integralom funkcije f nad oblašću $\overline{D}$ ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da važi

$$|S - I| < \varepsilon$$

za proizvoljnu pravilnu δ-podjelu oblasti $\overline{D}$.

Vidimo da je broj I granična vrijednost integralnih suma, tj.

$$I = \lim_{\max diam(\sigma_i) \to 0} S \ .$$

Definicija 16..9. Ako postoji jedinstvena i konačna granična vrijednost integralnih suma finkcije $f(X)$, kažemo da je funkcija integrabilna u datoj oblasti.

Pri tome je dakle

$$\begin{aligned} I &= \lim S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) mes(\sigma_i) \\ &= \int \int ... \int_{\overline{D}} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \\ &= \int_{\overline{D}} f(X) d\sigma \end{aligned}$$

Za funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, integrabilnu u oblasti $\overline{D}$, imamo

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) mes(\sigma_k) = \iint_{\overline{D}} f(x, y) dx dy \ ,$$

pri čemu činjenica da $n \to \infty$ je ekvivalentna da $\max diam(\sigma_k) \to 0$. Ovaj integral nazivamo *dvojni integral* funkcije $f(x,y)$ nad zatvorenom oblasti $\overline{D}$.
Za funkciju tri promjenljive $f(x,y,z)$ koja je integrabilna u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, po definiciji imamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)mes(\sigma_k) = \iiint_{\overline{D}} f(x,y,z)dxdydz\ ,$$

i ovaj višestruki integral nazivamo *trojni integral* funkcije $f(x,y,z)$ nad zatvorenom oblasti $\overline{D}$. Od kriterijuma za integrabilnost funkcije više promjenljivih navedimo,

Teorem 16..10. *Funkcija $f(x_1,x_2,...,x_n)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$ integrabilna je u datoj oblasti.*

16.0.2. Osobine integrabilnih funkcija

Osobine integrabilnih funkcija
Sljedeće teoreme navodimo bez dokaza, iako se njihovo dokazivanje lako izvodi koristeći definiciju višestrukog integrala, potpuno analogno odgovarajućim teoremama za funkciju jedne promjenljive.

Teorem 16..11 (Aditivnost integrala po podintegralnoj funkciji)**.** *Neka su f i f_i ($i = 1,2,...,n$) integrabilne funkcije u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$ i neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:*

1. $\int_{\overline{D}}(f_1(X) \pm ... \pm f_n(X))d\sigma = \int_{\overline{D}} f_1(X)d\sigma \pm ... \pm \int_{\overline{D}} f_n(X)d\sigma$.
2. $\int_{\overline{D}} Cf(X)d\sigma = C\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma$.

Teorem 16..12 (Aditivnost po oblasti integracije)**.** *Za proizvoljnu podjelu oblasti integracije $\overline{D}$ na disjunktne parcijalne oblasti $\overline{D_1}$, $\overline{D_2}$,...$\overline{D_n}$, važi*

$$\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma = \int_{\overline{D_1}} f(X)d\sigma + \int_{\overline{D_2}} f(X)d\sigma + ... + \int_{\overline{D_n}} f(X)d\sigma\ ,$$

pri čemu je funkcija $f(X)$ integrabilna u svakom dijelu $\overline{D_i}$ ($i = 1,2,...,n$) ukoliko je ona integrabilna u $\overline{D}$ i obrnuto.

Teorem 16..13. *Ako sa m i M označimo infimum i supremum integrabilne funkcije $f(X)$ u $\overline{D}$, tada vrijedi procjena*

$$mes(\overline{D})m \leq \int_{\overline{D}} f(X)d\sigma \leq mes(\overline{D})M\ .$$

Teorem 16..14. *Ako u zatvorenoj oblasti vrijedi $f(X) \geq 0$ ($f(X) \leq 0$), tada vrijedi*

$$\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma \geq 0 \quad \left(\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma) \leq 0\right)\ .$$

Za primjenu višestruke integracije posebno je važan sljedeći teorem.

Teorem 16..15. *Ako je $f(X) = 1$ za svako $X \in \overline{D}$, tada je*

$$\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma = \int_{\overline{D}} d\sigma = mes(\overline{D})\ .$$

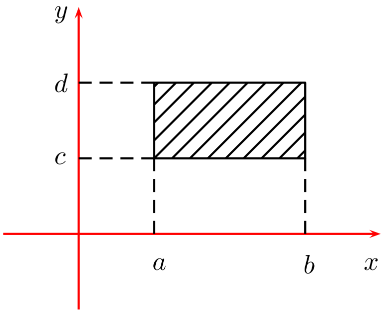
U slučaju dvojnog integrala gdje je oblast integracije iz dvodimenzionalnog euklidskog prostora, ovo znači da dvojni integral $\iint_{\overline{D}} dxdy$ predstavlja površinu oblasti $\overline{D}$, a u slučaju trojnog integrala $\iiint_{\overline{D}} dxdydz$ ovo predstavlja zapreminu oblasti $\overline{D}$.

16.1. Dvojni integral

16.1.1. Dvojni integral po pravougaonoj oblasti

Dvojni integral po pravougaonoj oblasti
Posmatrajmo funkciju $f(x,y)$ definisanu u zatvorenom pravougaoniku

$$\overline{D}: \quad a \le x \le b \quad , \quad c \le y \le d \, .$$



Definicija 16..16. Neka je funkcija

$$\Phi_1(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

integrabilna za svako $x \in [a,b]$, tada integral

$$\int_a^b \Phi_1(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

nazivamo dvostrukim integralom funkcije $f(x,y)$ u zatvorenoj pravougaonoj oblasti $\overline{D}$ pri sukcesivnoj integraciji prvo po promjenljivoj y, a zatim po promjenljivoj x.

Takodje, možemo posmatrati funkciju

$$\Phi_2(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

za koju zahtjevamo da je integrabilna za svako $y \in [c,d]$, onda integral

$$\int_c^d \Phi_2(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

nazivamo dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ u oblasti $\overline{D}$ pri sukcesivnoj integraciji prvo po x, a zatim po y.

Teorem 16..17. *Neka je funkcija $f(x,y)$ integrabilna u zatvorenoj pravougaonoj oblasti $\overline{D}$ (tj. neka postoji dvojni integral funkcije f) i neka za proizvoljno $x \in [a,b]$ postoji integral $\int_c^d f(x,y)dy$. Tada postoji dvostruki integral*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

i pri tome vrijedi

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \, .$$

Na sličan način pod odgovarajućim uslovima, važi

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \ .$$

Teorem 16..17 nam u stvari daje tehniku za izračunavanje dvojnog integrala nad pravougaonom oblasti. Ona se kako vidimo, svodi na prelazak iz dvojnog u dvostruki integral čije su granice u slučaju pravougaone oblasti, konstantne.
Kao posljedicu Teorema 16..17 i napomene iza nje, imamo

Posljedica 16..18. *Ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna u zatvorenom pravougaoniku $\overline{D}$ i ako postoje dvostruki integrali*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \text{ i } \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \ ,$$

tada vrijedi

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \ .$$

Ovo nam u stvari govori da redoslijed integracije ne utiče na vrijednost dvojnog integrala.

Primjer. Izračunati integral $I = \iint_{\overline{D}} \cos(x+y)dxdy$, gdje je $\overline{D}$ kvadrat

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \ .$$

Dvojni integral I svodimo na dvostruki, tj.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx[\sin(x+y)] \ |_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x\right] dx = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \ |_0^{\frac{\pi}{2}} \ + \cos x \ |_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Primjer. Izračunati: $I = \iint_D 6xy^2dxdy$, gdje je D pravougaonik $[2,4]\times[1,2]$.

$$\begin{aligned} \iint_D 6xy^2dxdy &= \int_2^4 \left(\int_1^2 6xy^2dy\right) dx \\ = \int_2^4 \left(6x\int_1^2 y^2dy\right) dx &= \int_2^4 \left(6x\frac{y^3}{3}\bigg|_1^2\right) dx \\ = \int_2^4 (16x-2x)\, dx &= 14\int_2^4 xdx \\ = 14\ \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 &= 84 \end{aligned}$$

Primjetimo u gornjem primjeru da je podintegralna funkcija $f(x,y) = 6xy^2$ oblika $f(x,y) = g(x)h(y)$. Kod dvojnog integrala sa konstantnim granicama to možemo koristiti na sljedeći način

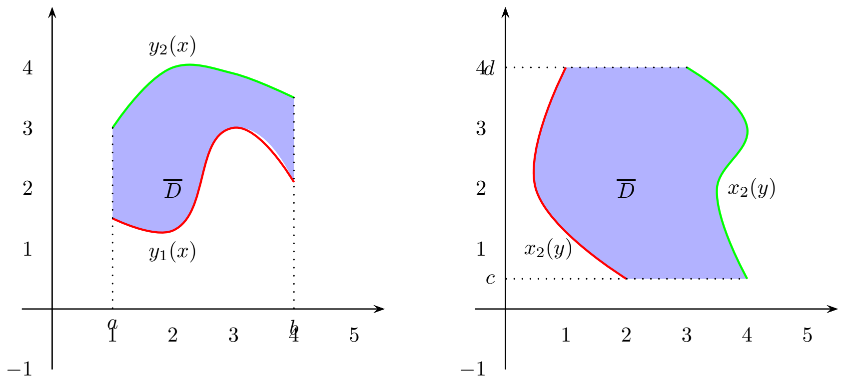
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy \ .$$

Tako bi u posljednjem primjeru imali

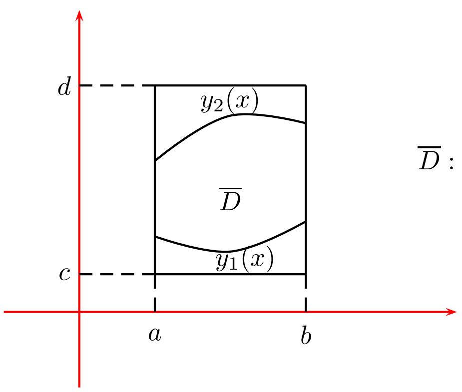
$$\int\int_D 6xy^2 = 6\int_2^4 xdx \cdot \int_1^2 y^2dy = 6\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^2 = 84$$

16.1.2. Dvojni integral po proizvoljnoj oblasti

Dvojni integral po proizvoljnoj oblasti
U integraciji po proizvoljnoj oblasti mogu nastupiti dva slučaja prikazana na sljedećoj slici. Na slici lijevo imamo situaciju kada se x nalazi izmedju konstantnih granica a i b, a y je izmedju krivih $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Na desnoj slici imamo obrat, tj. $c \leq y \leq d$ i $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$.
Razmotrimo situaciju prestavljenu lijevom slikom, a na potpuno analogan način se razmatra i druga mogućnost.



Neka su funkcije y_1 i y_2 takve da za svako $x \in [a, b]$ vrijedi $y_1(x) \leq y_2(x)$. Posmatrajmo oblast zadatu sa



$$\overline{D}: \; a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

Neka su c i d fiksirani realni brojevi takvi da je $c \leq y_1(x) \leq y_2(x) \leq d$. Tada je sistemom

$$\overline{D^*}: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d$$

zadana pravougaona oblast , za koju uočavamo da je sastavljena od tri odvojene oblasti:

1. $\overline{D_1}: \quad a \leq x \leq b \,,\; c \leq y \leq y_1(x)$
2. $\overline{D}: \quad a \leq x \leq b \,,\; y_1(x) \leq y \leq y_(x)$
3. $\overline{D_2}: \quad a \leq x \leq b \,,\; y_2(x) \leq y \leq d\,.$

Pomoću funkcije $f(x,y)$ definisane u oblasti $\overline{D}$, konstruišimo novu funkciju.

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \qquad (x,y) \in \overline{D} \\ 0 & ; \quad (x,y) \in \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \end{cases}$$

Funkcija f^* je integrabilna u oblasti pravougaonika jer je konstantna na $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$, a poklapa se sa integrabilnom funkcijom f na $\overline{D}$. Prema prethodnoj sekciji sada imamo

$$\iint_{\overline{D^*}} f^*(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)dy \; . \tag{43}$$

Posmatrajmo sada lijevu stranu u jednakosti (43). Na osnovu aditivnosti višestrukog integrala po oblasti integracije, imamo

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D^*}} f^*(x,y)dxdy &= \iint_{\overline{D_1}} f^*(x,y)dxdy + \iint_{\overline{D}} f^*(x,y)dxdy \\ &+ \iint_{\overline{D_2}} f^*(x,y)dxdy \; . \end{aligned} \tag{44}$$

Na osnovu definicije funkcije f^* je

$$\iint_{\overline{D_1}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D_2}} f^*(x,y)dxdy = 0$$

i

$$\iint_{\overline{D}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \; .$$

Sada iz (44) imamo

$$\iint_{\overline{D^*}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \; . \tag{45}$$

Posmatrajmo sada unutrašnji integral na desnoj strani u (43). Zbog aditivnosti odredjenog integrala važi

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy \tag{46}$$

$$+ \int_{y_2(x)}^d f^*(x,y)dy \tag{47}$$

Opet na osnovu definicije funkcije f^* vrijedi

$$\int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy = \int_{y_2(x)}^d f^*(x,y)dy = 0 \; ,$$

pa jednakost (47) postaje

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \; . \tag{48}$$

Koristeći (45) i (48), jednakost (43) postaje

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \; . \tag{49}$$

Ako je oblast integracije data sistemom (desna slika)

$$\overline{D}: \quad x_1(y) \le x \le x_2(y) \quad , \quad c \le y \le d \, ,$$

slično gornjem rezonovanju bi dobili

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \, . \tag{50}$$

Formule (49) i (50) nam daju način izračunavanja dvojnog integrala za proizvoljnu oblast integracije. Dakle, dvojni integral rješavamo pomoću dvostrukog integrala u kome su granice unutrašnje integracije eventualno ovisne o jednoj promjenljivoj dok su granice spoljašnje integracije obavezno konstantne (po promjenljivima integracije). Što se tiče pravila za izračunavanje dvojnih integrala, ona su

1. Aditivnost po podintegralnoj funkciji:

$$\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy \, .$$

2. Izvlačenje konstante:

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy \, .$$

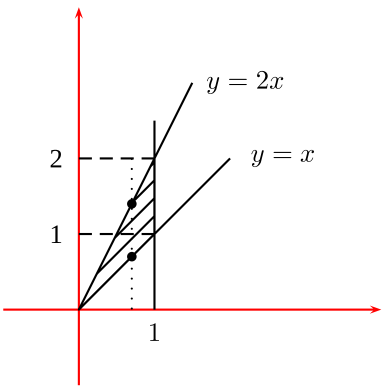
3. Aditivnost po granici integracije:

$$\iint_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \, .$$

Primjer. Izvršiti prelaz iz dvojnog u dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ nad oblašću $\overline{D}$, ako je

$$\overline{D}: \quad y = x \, , \; y = 2x \, , \; x = 1 \, .$$

Oblast integracije je šrafirani dio na slici.



Odlučimo se za redoslijed integracije prvo (unutrašnja) po y, a zatim (spoljašnja) po x. To nam onda diktira da granice za x moraju biti konstante, dok za y one mogu ovisiti o varijabli x. Projektujući oblast $\overline{D}$ na x-osu, dobijamo da su granice za x od 0 do 1. Birajući proizvoljan $x \in [0,1]$ i posmatrajući vertikalu u toj tački, konstatujemo da se najmanja vrijednost y postiže na liniji $y = x$, a najveća na liniji $y = 2x$.

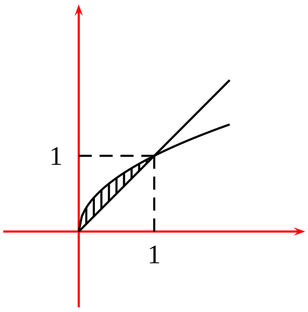
To nam upravo predstavlja granice integracije.

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx \, .$$

Ako bi zamjenili redoslijed integracije treba primjetiti da datu oblast moramo podijeliti na dvije parcijalne oblasti, naime

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)dx \ .$$

Primjer. Izvršiti prelaz iz dvojnog u dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ nad oblašću $\overline{D}: \quad y = x \ , \ y = \sqrt{x}$.



Oblast integracije je šrafirani dio na slici. Sada imamo

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx \ . \end{aligned}$$

Primjetimo da u ovom slučaju imamo jednostavnu zamjenu redoslijeda integracije, tj.

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{x^2}^{x} f(x,y)dx \ ,$$

što u prvom primjeru nije bio slučaj.

16.2. Trojni integral

16.2.1. Trojni integral po oblasti pravouglog paralelopipeda

Trojni integral po oblasti pravouglog paralelopipeda
Neka je sada funkcija $f(x,y,z)$ definisana i integrabilna u zatvorenoj oblasti

$$\overline{V}: \quad a_1 \le x \le a_2 \ , \ b_1 \le y \le b_2 \ , \ c_1 \le z \le c_2 \ .$$

Na slici su sa V_{xy}, V_{xz} i V_{yz} označene redom projekcije paralelepipeda $\overline{V}$ na xOy, xOz i yOz ravan.

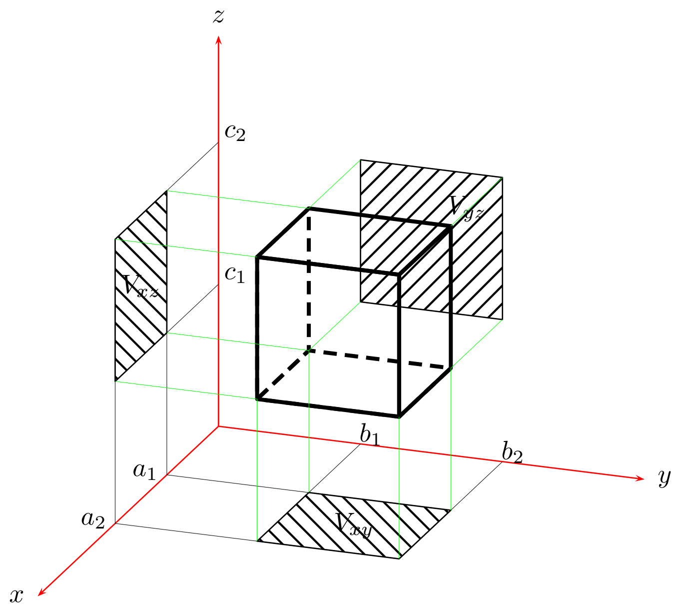
Definicija 16..19. Neka je funkcija

$$\Phi_1(x) = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

integrabilna na segmentu $[a_1, a_2]$. Tada integral

$$\int_{a_1}^{a_2} \Phi(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

nazivamo trostrukim integralom funkcije $f(x,y,z)$ u zatvorenom paralelepipedu pri čemu se integracija vrši prvo po promjenljivoj z zatim po promjenljivoj y i na kraju po promjenljivoj x.



Slika 21: Trojni integral po pravougloj oblasti

Definicija 16..20. Neka je funkcija

$$\Phi_2(z) = \iint_{V_{xy}} f(x,y,z)dxdy$$

integrabilna na segmentu $[c_1, c_2]$. Integral

$$\int_{c_1}^{c_2} \Phi(z)dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{V_{xy}} f(x,y,z)dxdy$$

nazivamo trostrukim integralom funkcije $f(x,y,z)$ po oblasti zatvorenog paralelepipeda, pri sukcesivnoj integraciji prvo unutrašnja integracija po projekciji paralelepipeda u xOy ravan (dvojni integral), a zatim spoljna integracija po promjenljivoj z.

Definicija 16..21. Neka je funkcija

$$\Phi_3(x,y) = \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

integrabilna u oblasti V_{xy}. Integral

$$\iint_{V_{xy}} \Phi_3(x,y)dxdy = \iint_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

nazivamo trostruki integral funkcije $f(x,y,z)$ po oblasti paralelepipeda, pri sukcesivnoj integraciji prvo po promjenljivoj z (unutrašnja integracija), a zatim po oblasti V_{xy} (spoljašnja integracija).

Jasno da sve tri gornje definicije definišu isti pojam trostrukog integrala, samo sa različitim redoslijedima integracije. Analogno gornjim definicijama mogli smo posmatrati i bilo koju drugu varijantu redoslijeda integracija na desnim stranama jednakosti.

Teorem 16..22. *Neka je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna u zatvorenom paralelepipedu $\overline{V}$ i neka za proizvoljno $(x,y) \in V_{xy}$ postoji integral $\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$, tada postoji i integral*

$$\iint_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

i vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} \iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz &= \iint_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \\ &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \ . \end{aligned}$$

Primjer. Izračunati $\iiint_V xyzdxdydz$, gdje je oblast V zadata sa:

$$0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le z \le 1 \ .$$

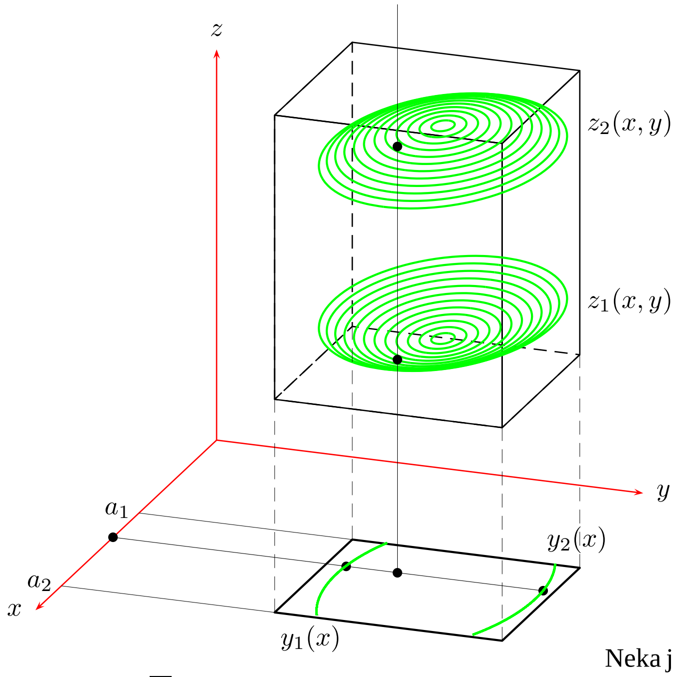
Dakle, u pitanju je integracija po paralelepipedu, zato vrijedi

$$\begin{aligned} \iiint_V xyzdxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 xyzdz \\ = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(xy\frac{z^2}{2} \right)_0^1 &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{2}dy \\ = \int_0^1 dx \left(\frac{x}{2}\frac{y^2}{2} \right)_0^1 &= \int_0^1 \frac{x}{4}dx = \frac{1}{8} \ . \end{aligned}$$

16.2.2. Trojni integral po proizvoljnoj oblasti

Trojni integral po proizvoljnoj oblasti
Neka je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru zadata oblast

$$\overline{V} : \quad a_1 \le x \le a_2 \ , \ y_1(x) \le y \le y_2(x) \ , \ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \ .$$



Neka je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna u oblasti $\overline{V}$. Slično rezonovanju kod dvojnog integrala i ovdje bi smo oko oblasti $\overline{V}$ opisali paralelepiped, pa bi smo dijeleći taj paralelepiped na disjunktne oblasti došli do jednakosti

$$\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \ ,$$

koja nam daje jedan od načina rješavanja trojnog integrala.

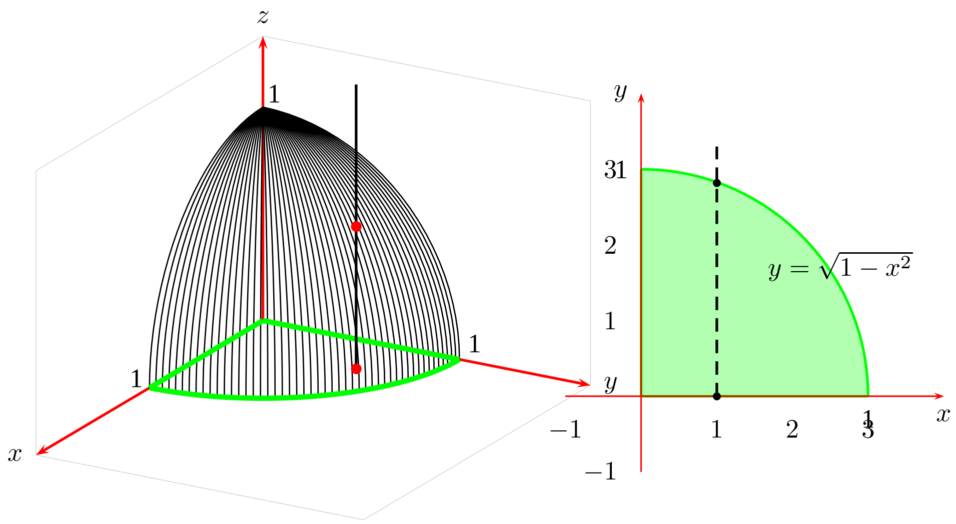
Primjer. Izračunati $\iiint_V xyzdxdydz$, gdje je oblast V zadata sa

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ .$$

Sada imamo integraciju po dijelu lopte centra $(0,0,0)$, poluprečnika 1, koji se nalazi u prvom oktantu. Neka prva integracija bude po z, druga po y i treća po x. To znači da su granice za x konstantne, pa zato projektujmo tijelo V u xOy ravan (slika desno) iz koje vidimo granice

$$0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \ .$$

Granice za z odredjujemo na sličan način kao za y: u oblasti projekcije izaberemo proizvoljnu tačku i iz nje vučemo vertikalu. Na toj vertikali odredjujemo najmanju i najveću vrijednost za z, odnosno na kojim površima se nalaze te vrijednosti. Na slici vidimo da je najmanja vrijednost za z u ravni $z = 0$, a najveća se uvijek nalazi na površi $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.



Ovo nam sada daje prelaz iz trojnog u trostruki integral

$$\iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz\ .$$

Ostaje još "računski" dio zadatka.

$$\begin{aligned}
\iiint_V xyzdxdydz &= \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz \\
&= \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left.\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{y^4}{4}\right|_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

16.3. Jacobijeva determinanta

Jabobijeva determinanta

U linearnoj algebri smo vidjeli da matrice nisu ništa drugo do preslikavanja vektorskog prostora. Pri tome smo se upoznali sa matricama prelaza i vidjeli da je dovoljno znati u šta se preslikavaju vektori baze. Tako na primjer matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

predstavlja rotaciju ravni odnosno $\mathbb{R}^2$ prostora. Ako sada posmatramo proizvoljan sistem

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

možemo ga zapisati u matričnom obliku

$$Y = AX$$

pa on dakle predstavlja neko preslikavanje $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji inverzno preslikavanje datog preslikavanja, takvo preslikavanje nazivamo *regularnim*. U gornjem slučaju to će biti ako postoji A^{-1}, tj. ako je matrica A regularna matrica. Posmatrajmo sada opšti slučaj preslikavanja

$$
\begin{array}{ccc}
y_1 & = & f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\
y_2 & = & f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n & = & f_n(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{array}
\tag{51}
$$

Na osnovu ovog sistema možemo formirati funkcionalnu determinantu

$$
J = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
$$

Definicija 16..23. Za preslikavanje (51) kažemo da je regularno u oblasti D ako vrijedi

1. funkcije $f_1, ..., f_n$ imaju neprekidne parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj,
2. $J \neq 0$.

Determinantu J nazivamo *Jacobijeva determinanta* ili *jakobijan* preslikavanja (51). U literaturi se često za jakobijan preslikavanja (51) koristi oznaka

$$J = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} .$$

Ako je dato preslikavanje (51) i preslikavanje

$$
\begin{array}{ccc}
x_1 & = & g_1(t_1, t_2, ..., t_n) \\
x_2 & = & g_2(t_1, t_2, ..., t_n) \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n & = & g_n(t_1, t_2, ..., t_n) ,
\end{array}
\tag{52}
$$

nije teško pokazati da za jakobijane ovih preslikavanja važi

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \frac{D(g_1, g_2, ..., g_n)}{D(t_1, t_2, ..., t_n)} = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(t_1, t_2, ..., t_n)} .$$

Iz ovoga onda proizilazi važna osobina jakobijana:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \frac{D(x_1, x_2, ..., x_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} = 1 ,$$

naravno pod pretpostavkom postojanja inverznih preslikavanja y_i^{-1} ($i = 1, 2, ..., n$).

Primjer. Odrediti jakobijan preslikavanja

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

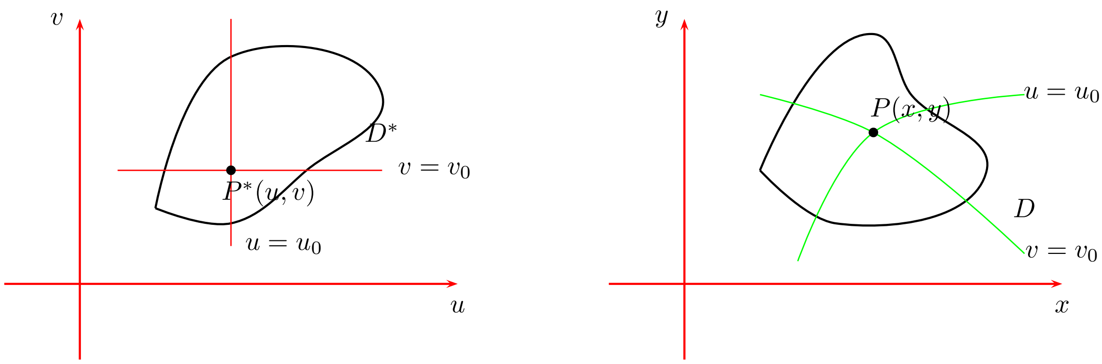
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho .$$

16.3.1. Smjena promjenljivih u dvojnom integralu

Izračunavanje integrala, kao što smo to vidjeli kod običnog jednostrukog Riemanovog integrala, često je olakšano uvodjenjem povoljne smjene. Ista je situacija i kod n-integrala, tj. pogodnom smjenom uprošćava se računanje n-integrala. Neka je zadat sistem

$$x = x(u, v) , \ y = y(u, v) \tag{53}$$

Dati sistem predstavlja transformaciju uv-ravni u xy-ravan, tj. svakoj tački $P^*(u, v)$ iz uv-ravni odgovara tačka $P(x, y)$ iz xy-ravni. Ako tački $P^* \in D^*$ odgovara jedinstvena tačka $P \in D$ i obratno, tada je gornjom transformacijom uspostavljeno bijektivno preslikavanje oblasti D^* na D.



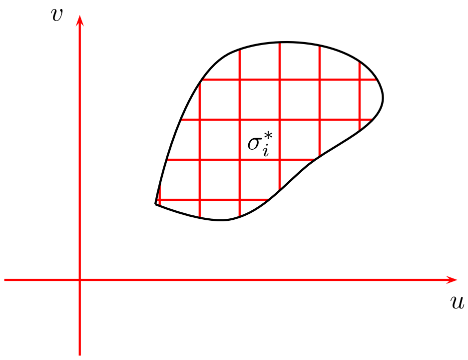
Gornjom transformacijom se prava $u = u_0$ oblasti D^*, koja se nalazi u uv-ravni, preslikava na krivu u-liniju u xy-ravni

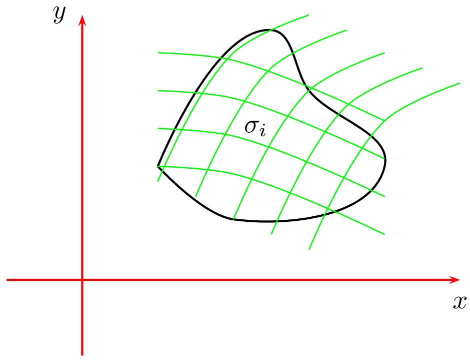
$$x = x(u_0, v) , \ y = y(u_0, v) .$$

Analogno, prava $v = v_0$ oblasti D^* iz uv-ravni se preslikava u krivu v-liniju u xy-ravni

$$x = x(u, v_0) , \ y = y(u, v_0) .$$

Ukoliko je oblast D^* podjeljena mrežom pravih $u = u_0, \ v = v_0$, na pravolinijske ćelije-pravougaonike σ_i^*, transformacijom (53) se ta podjela preslikava u krivolinijske ćelije σ_i u xy-ravni.





Pri tome se pokazuje da vrijedi

$$\lim_{diam\sigma_i \to 0} \frac{mes(\sigma_i)}{mes(\sigma_i^*)} = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = |J(x_i, y_i)| ,$$

u nekoj tački $(x_i, y_i) \in \sigma_i$.
Ovo nam daje princip promjene oblasti integracije prilikom uvodjenja smjena.

Teorem 16..24. *Ako se sistemom funkcija*

$$x = x(u,v) \ , \ y = y(u,v)$$

realizuje bijektivno preslikavanje oblasti D^* u oblast D i ako je funkcija $f(x,y)$ integrabilna u oblasti D, tada je

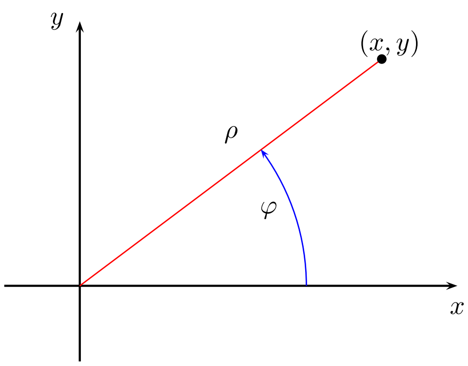
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(x,y))|J(u,v)|dudv \ .$$

Kao specijalnu smjenu kod dvojnih integrala navodimo ovdje polarne koordinate, tj. transformaciju

$$x = \rho\cos\varphi \ \ , \ \ y = \rho\sin\varphi \ , \tag{54}$$

pri čemu su prirodne granice novih varijabli date sa

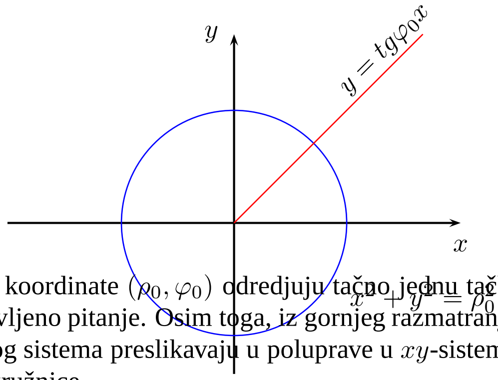
$$0 \le \rho < +\infty \ \ , \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$



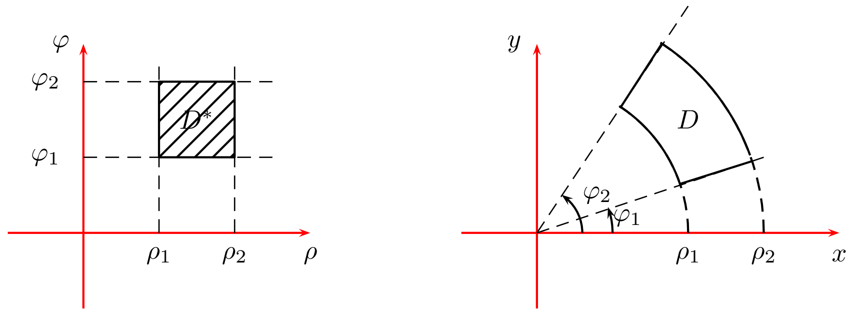
Geometrijski, ρ predstavlja udaljenost tačke od koordinatnog početka, a φ je ugao izmedju pozitivnog dijela x-ose i duži ρ, te odatle proizilaze prirodne granice za ove veličine.

Naravno, sada se postavlja pitanje da li postoje različite tačke u xy-ravni kojima bi odgovarale iste veličine ρ i φ? Ako posmatramo neko fiksno ρ_0, koristeći smjene

54 zaključujemo da sve tačke na kružnici $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ imaju istu udaljenost od koordinatnog početka. Analogno, ako fiksiramo neki ugao φ_0, ponovo koristeći smjene (54) dobijamo da sve tačke na polupravoj $y = tg\varphi_0 x$ imaju isti ugao prema pozitivnom dijelu x-ose.



Iz ovoga zaključujemo da polarne koordinate (ρ_0, φ_0) odredjuju tačno jednu tačku u xy-ravni, što je i odgovor na postavljeno pitanje. Osim toga, iz gornjeg razmatranja se vidi da se linije $\varphi = \varphi_0$ iz polarnog sistema preslikavaju u poluprave u xy-sistemu, a da se linije $\rho = \rho_0$ preslikavaju u kružnice.



Dakle slika preslikavanjem (54) oblasti D^* iz polarnog sistema, je oblast D u pravouglom koordinatnom sistemu.
Kako je jakobijan ovog preslikavanja dat sa $J = \rho$, to na osnovu gornje teoreme imamo

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi))\rho d\rho d\varphi \ .$$

Primjer. Izračunati: $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, gdje je oblast integracije $D:\ x^2+y^2=1$.
Uvedimo polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Ubacujući ove smjene u jednačinu kružnice, dobijamo da je $\rho = 1$. Kako nemamo nikakav uslov na ugao φ, to je nova oblast integracije data sa

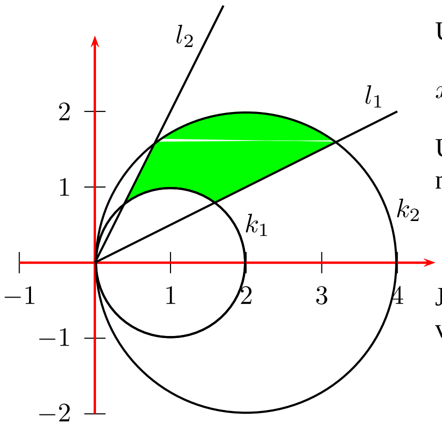
$$D^* \ : \ 0 \le \rho \le 1 \ , \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int\int_{D^*} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= \pi(1-e^{-1}) \ . \end{aligned}$$

Primjer. Izračunati: $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$, gdje je oblast zadata sa

$$D:(k_1)\; x^2+y^2=2x\;,\;(k_2)\; x^2+y^2=4x\;,\;(l_1)\; y=\frac{x}{2}\;,\;(l_2)\; y=2x\;.$$



Uvedimo polarne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi\;,\; y=\rho\sin\varphi\;,\; J=\rho\;.$$

Ubacujući smjene u jednačine kružnice k_1 i k_2, dobijamo redom

$$\rho=2\cos\varphi\;,\;\rho=4\cos\varphi\;. \qquad (55)$$

Jednačine linija l_1 i l_2 daju nam veze

$$tg\varphi=\frac{1}{2}\;,\; tg\varphi=2\;. \qquad (56)$$

Veze (55) i (56) nam daju upravo donju i gornju granicu novih varijabli, tj. novodobijena oblast je

$$D^*:\;\rho\geq 2\cos\varphi\;,\;\rho\leq 4\cos\varphi\;, arctg\frac{1}{2}\leq\varphi\leq arctg2\;.$$

Sada je prelaz u dvostruki integral dat sa

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy &= \iint_{D^*}\frac{1}{\rho^4}\rho d\rho d\varphi\\
&= \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4cos\varphi}\frac{1}{\rho^3}d\rho\\
&= -\frac{1}{2}\int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2}\left(\frac{1}{16\cos^2\varphi}-\frac{1}{4\cos^2\varphi}\right)d\varphi\\
&= \frac{3}{32}\int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi\\
&= \frac{3}{32}tg\varphi\Big|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2}\\
&= \frac{9}{64}\;.
\end{aligned}$$

Opštija smjena od gornje smjene su tzv. *uopštene polarne koordinate*, tj.

$$x=a\rho\cos\varphi\;\;,\;\; y=b\rho\sin\varphi\;,$$

gdje su a i b pozitivni realni brojevi. Ovom smjenom se elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u xy-ravni, prevodi u jediničnu kružnicu $\rho=1$ u $\rho\varphi$-ravni. Jakobijan ovog preslikavanja je $J=ab\rho$. Napomenimo još i to da ako želimo jednačinu opšte elipse

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1\;,$$

prevesti u jediničnu kružnicu u $\rho\varphi$-ravni, to ćemo postići smjenama

$$x = a(\rho\cos\varphi + p)\ ,\ y = b(\rho\sin\varphi + q)\ ,$$

sa jakobijanom $J = ab\rho$.

16.3.2. Smjena promjenljivih u trojnom integralu

Smjena promjenljivih u trojnom integralu
Neka je dat sistem

$$x = x(u,v,w)\ ,\ y = y(u,v,w)\ ,\ z = z(u,v,w)\ , \tag{57}$$

kojim je definisano bijektivno preslikavanje tačaka $P^*(u,v,w)$ uvw-prostora, u tačke $P(x,y,z)$ iz xyz-prostora. Ako je J jakobijan preslikavanja (57) tada vrijedi

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudvdw\ ,$$

gdje je V^* oblast u uvw-prostoru nastala preslikavanjem (57) oblasti V u xyz-prostoru. Kako smo se već ranije upoznali sa cilindričnim i sfernim koordinatnim sistemom, ovdje ćemo specijalno pokazati ove dvije vrste smjena u trojnom integralu.
Dakle, ako pravougli Descartesov koordinatni sistem zamjenimo cilindričnim koordinatnim sistemom, što ostvarujemo sistemom

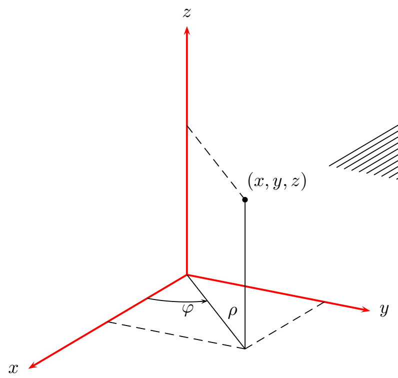
$$x = \rho\cos\varphi\ ,\ y = \rho\sin\varphi\ ,\ z = z\ ,$$

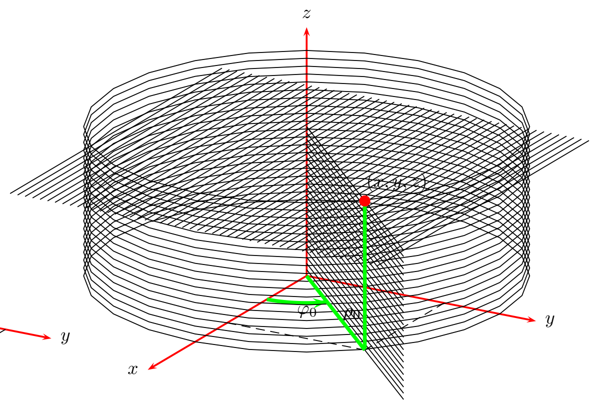
jakobijan kojeg je $J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \rho$, tada imamo

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz\ .$$

Geometrijska interpretacija cilindričnih koordinata je ta da svakoj tački (x,y,z) iz xyz-prostora, pridružimo njen položaj na z-osi, udaljenost projekcije te tačke u xy-ravni od koordinatnog početka, ρ, i ugao izmedju potega ρ i pozitivnog dijela x-ose, φ. Pri tome su prirodne granice novih varijabli

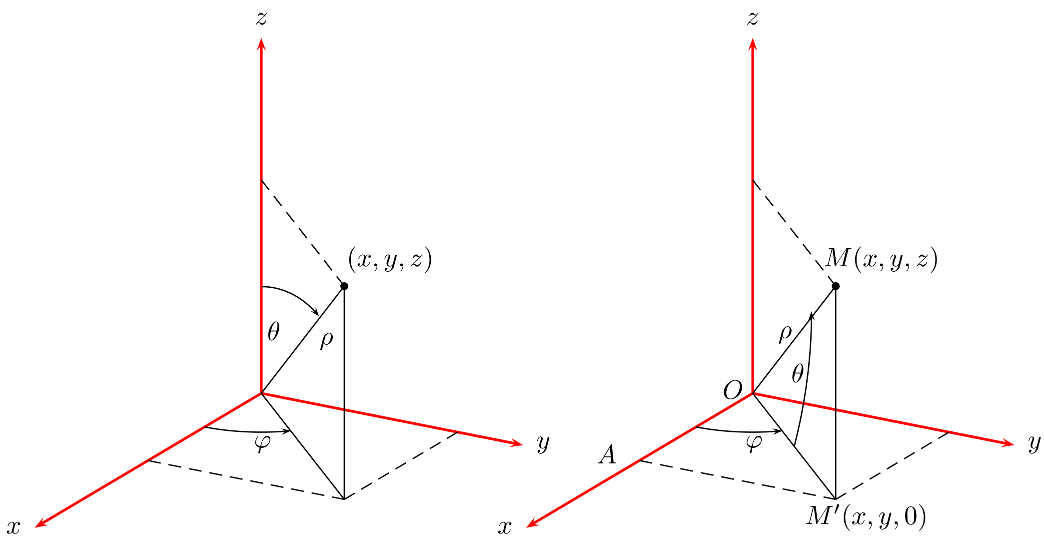
$$0 \le \rho < +\infty\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ;\ -\infty < z < +\infty\ .$$





Držeći po jednu od cilindričnih koordinata konstantnom, dobijamo takozvane koordinatne površi u xyz-prostoru. Ako je $\rho = \rho_0$, dobijamo koordinatnu površ $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ (cilindar).

Ako je $\varphi = \varphi_0$, odgovarajuća površ je data sa $y = tg\varphi_0 x$, a to je poluravan u prostoru koja sadrži z-osu. Na kraju, ako z držimo fiksnim, tj. $z = z_0$, odgovarajuća površ je ravan $z = z_0$. Sferni koordinatni sistem ima za ideju orijentaciju na sfernoj površini. Sferu možemo podijeliti "paralelnim" kružnicama, medju kojima je i ekvatorijalna, koje nazivamo paralelama i "velikim" kružnicama koje sve prolaze kroz polove sfere, koje nazivamo meridijanima.
U takvoj podjeli sfere, pokazuje se boljim opis položaja tačke u smislu koliko smo daleko (u stepenima) od nekog fiksnog meridijana i koliko smo daleko (u stepenima) od neke fiksne paralele, od uobičajenih koordinata, dužine, širine i visine. Naravno, ukoliko sferu "naduvavamo", treća bitna stvar o položaju je i udaljenost od koordinatnog početka. Postoje dva pristupa sfernim koordinatama, u zavisnosti koju paralelu biramo za fiksnu. Posmatrajmo gornju sliku desno. Uzimamo da je ρ udaljenost tačke



Slika 22: Dva pristupa sfernim koordinatama

M od koordinatnog početka, φ je udaljenost od meridijana, tj. ugao izmedju potega OM', gdje je M' projekcija tačke M u Oxy ravan i pozitivnog dijela x-ose i θ je ugao izmedju ρ i Oxy ravni, tj. udaljenost tačke M od ekvatorijalne ravni.
Uočimo trougao $\triangle OM'M$. To je pravougli trougao, pa iz njega očitavamo

$$\cos\theta = \frac{OM'}{OM}\ ,\ \sin\theta = \frac{MM'}{OM}\ ,$$

odnosno

$$OM' = \rho\cos\theta\ ,\ MM' = z = \rho\sin\theta\ . \tag{58}$$

Iz pravouglog trougla $\triangle OAM'$ očitavamo

$$\cos\varphi = \frac{OA}{OM'}\ ,\ \sin\varphi = \frac{AM'}{OM'}\ ,$$

tj.

$$OM' = \frac{x}{\cos\varphi}\ ,\ OM' = \frac{y}{\sin\varphi}\ . \tag{59}$$

Kombinujući (58) i (59) dobijamo sferne koordinate za slučaj kada ugao θ mjerimo od ekvatorijalne ravni.

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \ , \ y = \rho\sin\varphi\cos\theta \ , \ z = \rho\sin\theta \ .$$

Prirodne granice su

$$0 \le \rho < +\infty \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ ,$$

jer su od "ekvatora" najudaljeniji polovi i to sjeverni 90°, a južni -90°. Jakobijan za ovakve smjene je $J = \rho^2\cos\theta$, tako sada smjena u trojnom integralu izgleda

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta \ .$$

Uvodeći sferni koordinatni sistem, mjereći ugao θ od sjevernog pola (Slika 22, lijevo), sistem glasi

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta \ , \ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \ , \ z = \rho\cos\theta \ ,$$

gdje su prirodne granice novih koordinata

$$0 \le \rho < +\infty \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ 0 \le \theta \le \pi \ .$$

Sada je najudaljenija tačka od sjevernog pola, južni pol i to 180°. Jakobijan je $J = \rho^2\sin\theta$, i smjena u trojnom integralu izgleda ovako

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

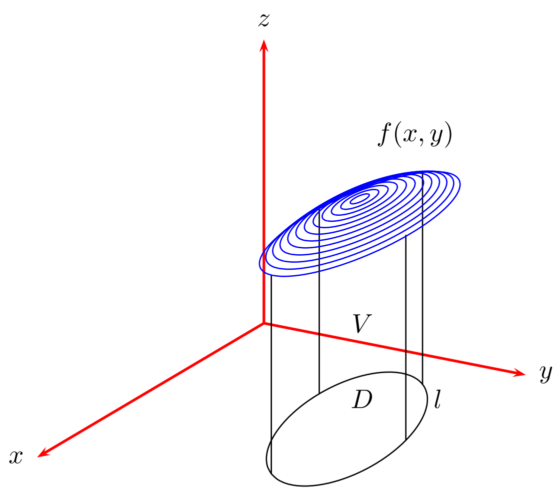
$$= \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta \ .$$

16.4. Primjena višestrukih integrala

Izračunavanje zapremine

Neka je $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $z \ge 0$, površ u prostoru xyz. Sa l' označimo granicu oblasti D.

Cilindrična površ sa vodiljom l' i izvodnicama paralelnim osi Oz, siječe površ $f(x,y)$ po krivoj l. Sa V označimo zapreminu tijela ograničeno sa pomenutom cilindarskom površi (sa strane), oblašću D (odozdo) i površi $f(x,y)$ (odozgo).



Tada je

$$V = \int\int_D f(x,y)dxdy \, . \tag{60}$$

Zaista, iz same definicije trojnog integrala jesno je da vrijedi

$$V = \iiint_V dxdydz \, ,$$

a ovo na osnovu Definicije 16..21, možemo zapisati kao

$$V = \int\int_D dxdy \int_0^{f(x,y)} dz = \int\int_D f(x,y)dxdy \, .$$

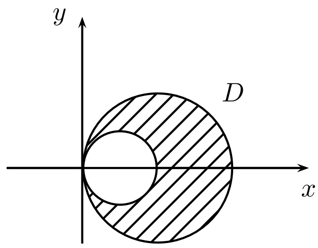
U slučaju da je $f(x,y) \leq 0$, jasno je da vrijedi

$$V = -\int\int_D f(x,y)dxdy \, .$$

Primjer. Izračunati zapreminu tijela ograničenog paraboloidom $z = x^2 + y^2$, cilindarskim površima $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ i sa ravni Oxy.
Ako sa D označimo oblast u Oxy ravni, omedjenu krugovima $x^2+y^2 = x$ i $x^2+y^2 = 2x$, tražena zapremina je

$$V = \int\int_D (x^2 + y^2)dxdy \, .$$

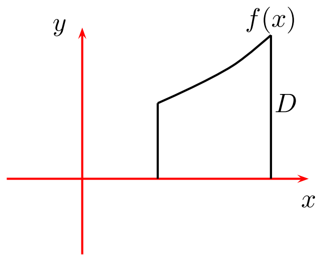
Uvedimo polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Jednačine krugova u polarnim koordinatama su $\rho = \cos\varphi$ i $\rho = 2\cos\varphi$.



Sada imamo

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\
&= \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi \\
&= \frac{45}{32}\pi \ .
\end{aligned}
$$

Izračunavanje površine ravnih likova
Posmatrajmo funkciju $y = f(x) \geq 0$ definisanu na razmaku $[a, b]$. Neka je D oblast ograničena sa gornje strane krivom $f(x)$ sa donje strane razmakom $[a, b]$ i sa strana pravama $x = a$ i $x = b$.



Iz ranijeg izučavanja znamo da je površina oblasti D data sa

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Medjutim, gornji izraz se može zapisati i sa

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int\int_D dxdy \ ,$$

što daje formulu za izračunavanje površine ravnog lika D.

Primjer. Izračunati površinu kruga poluprečnika r. U pitanju je proizvoljan krug, pa ćemo izabrati centralni krug poluprečnika r. Sada je tražena površina

$$P = \int\int_D dxdy \ , \ \ D: \ x^2 + y^2 = r^2 \ .$$

Uvedemo li polarne koordinate, tj. smjene $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, imamo

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho = r^2\pi \; .$$

Izračunavanje mase tijela

Posmatrajmo tijelo mase m u dijelu V prostora $\mathbb{R}^3$ u pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$. Količnik $\frac{m}{mes(V)}$ naziva se srednja gustina datog tijela. Ako sada uočimo proizvoljnu tačku $A(x, y, z) \in V$ i proizvoljnu kuglu $K(A, \varepsilon)$ oko te tačke koja leži u tijelu V, gustinu tijela u tački A, u oznaci $\rho(A)$ po definiciji računamo sa

$$\rho(A) = \rho(x, y, z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_K}{mes(K(A, \varepsilon))} \; ,$$

gdje je m_K masa lopte $K(A, \varepsilon)$. Ako je $\rho(A) = const$, za tijelo kažemo da je homogeno i u tom slučaju veza izmedju gustine ρ i zapremine $mes(V)$, data je poznatom nam formulom $m = mes(V)\rho$. Pretpostavimo zato da tijelo nije homogeno i da mu je gustina $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in V$, poznata. Izvršimo podjelu tijela V na podoblasti V_i, $i = 1, 2, ..., n$ kojih je dijametar proizvoljno malen i u kojima onda možemo smatrati da je gustina konstantna i jednaka $\rho(x_i, y_i, z_i)$ za neku tačku $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$. Jasno je tada da vrijedi

$$m_i = \rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) \; , \; i = 1, 2, ..., n \; ,$$

pa ako izvršimo sumiranje svih ovih masa, dobijamo približnu masu tijela. Prelaskom na limes

$$\lim_{\max mes(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) \; ,$$

dobija se masa tijela, tj.

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z)dxdydz \; .$$

Moment inercije

Pod momentom inercije materijalne tačke u odnosu na pravu podrazumijeva se proizvod mase tačke i kvadrata rastojanja te tačke od prave. Moment inercije konačnog skupa materijalnih tačaka jednak je zbiru momenata pojedinačnih tačaka. U cilju definisanja i izračunavanja momenta inercije tijela, postupam na sljedeći način.

Pretpostavimo da tijelo V u prostoru $Oxyz$ ima gustinu $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in V$. Podijelimo V na manje oblsti V_i, $i = 1, 2, ..., n$, i izaberimo istaknute tačke (x_i, y_i, z_i) u svakoj od podoblasti V_i. Smatrat ćemo da je momenat inercije I_i dijela tijela V_i u odnosu na osu Oz ima vrijednost

$$I_i = (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) \; .$$

Sumirajući i prelazeći na limes, dobija se po definiciji moment inercije I datog tijela

$$I = \lim_{\max mes(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) =$$

$$= \iiint_v (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz \; .$$

17. Krivolinijski integral

Krivolinijski integral
Pojam odredjenog integrala, definisanog na nekom segmentu realne prave, u prethodnoj smo glavi uopštili proširujući integraciju na oblast u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ prostoru. Sada ćemo uopštavanje izvršiti u drugom pravcu. Naime, ako za oblast integracije ne posmatramo segment prave linije, nego luk proizvoljne krive u prostoru, a podintegralna funkcija se definiše na tom luku, dolazimo do pojma krivolinijskog integrala.
Krivolinijski integral se koristi, kako u matematici, tako i u raznim primjenama (izračunavanje rada sile na putu, cirkulacija fluida, izračunavanje mase tijela itd.).
Uobičajeno se razmatraju dvije vrste krivolinijskih integrala, krivolinijski integral prve i krivolinijski integral druge vrste i mi ćemo ovdje uraditi isto uz napomenu da su sva razmatranja izvedena u prostoru $\mathbb{R}^3$.

17.1. Krivolinijski integral prve vrste

Posmatrajmo u prostoru $Oxyz$ dio krive L od tačke A do tačke B, koja se može rektificirati i koja nema samopresjeka. Neka su njene jednačine date sa

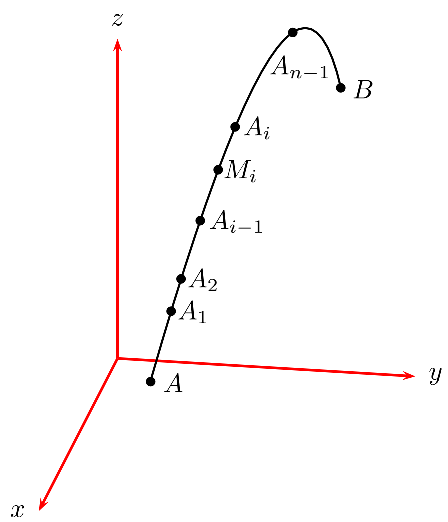
$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ \ ;\ \ t \in [\alpha, \beta]\ .$$

Neka je funkcija $f(x, y, z)$ definisana i ograničena na krivoj L. Podijelimo segment $[\alpha, \beta]$ na n dijelova

$$\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta\ .$$

Svakoj vrijednosti t_i, $i = 1, 2, ..., n$ odgovara na krivoj tačka A_i čije su koordinate (x_i, y_i, z_i), gdje je $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ i $z_i = z(t_i)$.
Specijalno, za $t = t_0$ imamo tačku $A(x_0, y_0, z_0)$ i za $t = t_n$ tačku $B(x_n, y_n, z_n)$.
Na svakom segmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo proizvoljnu vrijednost τ_i parametra t. Ovoj vrijednosti odgovara tačka $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ krive L, pri čemu je

$$\xi_i = x(\tau_i)\ ,\ \eta_i = y(\tau_i)\ ,\ \zeta_i = z(\tau_i)\ ;\ i = 1, 2, ..., n\ .$$



Sa Δs_i označimo dužinu luka $A_{i-1}A_i$ krive L. Posmatrajmo sljedeću integralnu sumu

$$\sigma(f, L) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i \tag{61}$$

Za broj I kažemo da je limes integralne sume $\sigma(f, L)$ kada $\max \Delta s_i$ teži 0, u oznaci

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma(f, L) = I \ ,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$, tako da je $|\sigma(f, L) - I| < \varepsilon$, za $\max \Delta s_i < \delta$ i za proizvoljan izbor tačaka (ξ_i, η_i, ζ_i) na lukovima $A_{i-1}A_i$ ($i = 1, 2, ..., n$).

Definicija 17..1. Ako za funkciju $f(x, y, z)$ definisanu i ograničenu na luku L postoji

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sigma(f, L) \ ,$$

onda se on naziva krivolinijski integral prve vrste funkcije $f(x, y, z)$ po krivoj L i označava se sa

$$\int_L f(x, y, z)ds \ \text{ ili } \ \int_{AB} f(x, y, z)ds \ .$$

Često ćemo umjesto o krivoj integracije govoriti o luku ili putanji integracije i nadalje ćemo podrazumijevati da je L dio-po-dio glatka kriva, a da je $f(x, y, z)$ ograničena na L i neprekidna u svim tačkama krive L, osim u njih konačno mnogo.
Ove posljednje pretpostavke su ustvari neophodni uslovi postojanja krivolinijskog integrala prve vrste.
Sljedećim teoremom navodimo neke od osnovnih svojstava ovog integrala.

Teorem 17..2. *Neka je L dio krive od tačke A do tačke B, neka su dalje f i g funkcije definisane na luku L i neka integrali $\int_L f(x, y, z)ds$ i $\int_L g(x, y, z)ds$ postoje.*

1. $$\int_L (af(x, y, z) + bg(x, y, z))ds = a\int_L f(x, y, z)ds + b\int_L g(x, y, z)ds \ .$$
2. *Za proizvoljnu tačku C luka L, izmedju tačaka A i B vrijedi*

$$\int_{AB} f(x, y, z)ds = \int_{AC} f(x, y, z)ds + \int_{CB} f(x, y, z)ds \ .$$

3. $\left|\int_L f(x, y, z)ds\right| \leq \int_L |f(x, y, z)|ds$.
4. *Ako je $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ za $(x, y, z) \in L$, onda je*

$$\int_L f(x, y, z)ds \leq \int_L g(x, y, z)ds \ .$$

Teorem 17..3. *Neka je $f(x, y, z)$ neprekidna funkcija na luku L. Postoji tačka $M^*(x^*, y^*, z^*)$ na luku L, takva da vrijedi*

$$\int_L f(x, y, z)ds = f(x^*, y^*, z^*) \cdot l(L) \ ,$$

gdje smo sa $l(L)$ označili dužinu luka L.

Teorem 17..4. *Ako postoji* $\int_{AB} f(x,y,z)ds$*, onda vrijedi*

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{BA} f(x,y,z)ds \; .$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz činjenice da veličina Δs_i predstavlja dužinu luka od tačke A_{i-1} do tačke A_i, pa je očigledno svejedno da li je posmatramo od A_{i-1} do A_i ili od A_i do A_{i-1}. □

17.1.1. Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Izračunavanje krivolinijskog integrala prve vrste

Teorem 17..5. *Neka je luk krive* $L = AB$ *zadat jednačinama*

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ;\ t \in [\alpha, \beta]\ , \tag{62}$$

glatka kriva bez singuarnih tačaka i neka je $f(x,y,z)$ *neprekidna funkcija na luku* L*. Tada vrijedi formula*

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt\ . \tag{63}$$

Vidimo da se u stvari krivolinijski integral prve vrste, ako je luk L zadat parametarskim jednačinama, svodi na obični Riemanov integral jedne varijable.

Primjer. Izračunati $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$, gdje je luk L zadat parametarskim jednačinama kružne zavojnice

$$L:\ x = a\cos t\ ,\ y = a\sin t\ ,\ z = bt\ ;\ t \in [0, \pi]\ .$$

Na osnovu formule 63 imamo

$$\begin{aligned}
\int_L (x^2+y^2+z^2)ds &= \int_0^{\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2) \\
&\quad \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\ dt \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi}(a^2+b^2t^2)dt \\
&= \left(\pi a^2 + \frac{4}{3}\pi^3 b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Primjer. Izračunati: $\int_{AB}(x+y+z)ds$, gdje je luk dio prave od tačke $A(1,1,1)$ do tačke $B(3,3,3)$.
Jednačina prave zadata tačkama A i B je $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ ili u parametarskom obliku $x = 2t+1\ ,\ y = 2t+1\ ,\ z = 2t+1$, pa je na osnovu formule (63)

$$\begin{aligned}
\int_{AB}(x+y+z)ds &= \int_0^1 (2t+1+2t+1+2t+1)\sqrt{6}\ dt \\
&= \sqrt{6}\int_0^1 (6t+3)dt \\
&= \sqrt{6}\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

17.2. Krivolinijski integral druge vrste

Krivolinijski integral druge vrste
Neka je kriva L u prostoru data jednačinama

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\ ;\ t \in [\alpha, \beta]$$

i neka su funkcije $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ definisane i ograničene na luku L. Podjelimo segment $[\alpha, \beta]$ na n dijelova tačkama t_i i na svakom podsegmentu $[t_{i-1}, t_i]$ izaberimo proizvoljnu vrijednost τ_i, $i = 1, 2, ..., n$.
Vrijednostima t_i, odnosno τ_i, odgovaraju tačke $A_i(x_i, y_i, z_i)$, odnosno $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, pri čemu je $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $z_i = z(t_i)$, $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$ i $\zeta_i = z(\tau_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Uvedimo još oznake $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ i $\Delta z_i = y_i - y_{i-1}$.
Sada možemo formirati sljedeće integralne sume:

$$\sigma_1(P, L) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i\ ,$$

$$\sigma_2(Q, L) = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i\ ,$$

$$\sigma_3(R, L) = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i\ .$$

Definicija 17..6. Neka za funkciju $P(x,y,z)$ ($Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$), definisanu na luku L, postoji limes integralne sume $\sigma_1(P,L)$ ($\sigma_2(Q,L)$, $\sigma_3(R,L)$) kada $\max \Delta x_i \to 0$ ($\max \Delta y_i \to 0$, $\max \Delta z_i \to 0$).
Tada se on naziva krivolinijskim integralom druge vrste funkcije $P(x,y,z)$ ($Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$) po luku L i označava se sa

$$\int_L P(x,y,z)dx\ \ \left(\int_L Q(x,y,z)dy\ ,\ \int_L R(x,y,z)dy\right)\ ,$$

ili

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx\ \ \left(\int_{AB} Q(x,y,z)dy\ ,\ \int_{AB} R(x,y,z)dy\right)\ .$$

Zbir $\int_L P(x,y,z)dx + \int_L Q(x,y,z)dy + \int_L R(x,y,z)dy$ se obično zapisuje u skraćenoj formi

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dy$$

i naziva se (opštim) krivolinijskim integralom druge vrste.

Teorem 17..7. *Neka je $L = AB$ luk krive, P i P_1 funkcije definisane na luku L i neka postoje integrali $\int_L P(x,y,z)dx$ i $\int_L P_1(x,y,z)dx$.*

1. *Za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} \int_L (aP(x,y,z) + bP_1(x,y,z))dx &= a\int_L P(x,y,z)dx \\ &+ b\int_L P_1(x,y,z)dx\ . \end{aligned}$$

2. *Neka je $C \in L$ izmedju tačaka A i B. Tada vrijedi*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{AC} P(x,y,z)dx + \int_{CB} P(x,y,z)dx \ .$$

Teorem 17..8. *Ako je $P(x,y,z)$ neprekidna funkcija na luku AB, onda postoji tačka $M^*(x^*,y^*,z^*)$ na luku AB, takva da je*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = P(x^*,y^*,z^*)(b-a) \ ,$$

gdje je $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Svojstvo da krivolinijski integral prve vrste ne ovisi o orijentaciji putanje integracije nije isto za krivolinijski integral druge vrste. Naime vrijedi,

Teorem 17..9. *Ako postoji integral $\int_{AB} P(x,y,z)dx$, tada vrijedi*

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx \ .$$

17.2.1. Izračunavanje krivolinijskog integrala druge vrste

Teorem 17..10. *Neka je kriva AB zadata jednačinama*

$$x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t) \ ; \ t \in [\alpha, \beta] \ ,$$

glatka i nema singularnih tačaka i neka je funkcija $P(x,y,z)$ neprekidna na luku AB. Tada važi formula

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t)dt \ . \tag{64}$$

Analogno se iskazuje tvrdnja i za funkcije Q i R, tj.

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t)dt \ ,$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t)dt \ .$$

Sada za sumarnu formulu imamo

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt \ . \tag{65}$$

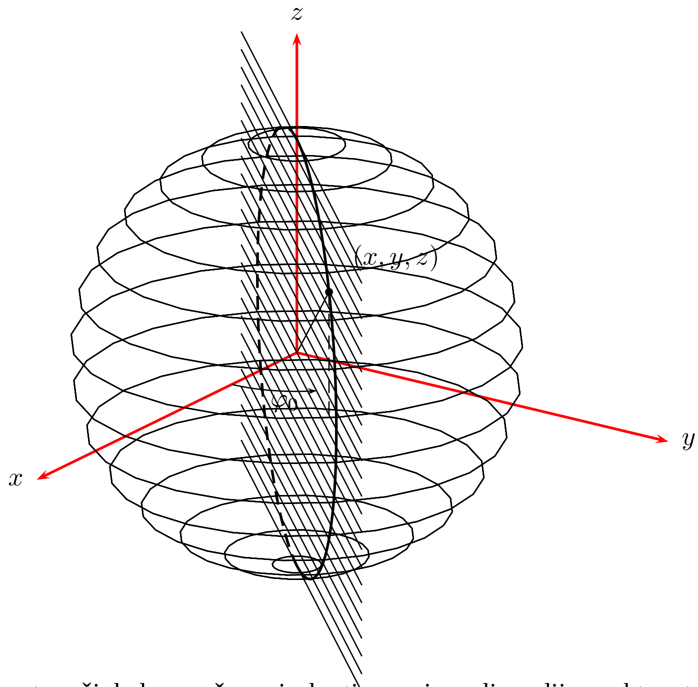
Primjer. Izračunati:

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy \ ,$$

gdje je L luk parabole $y = x^2$, od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.
Za parametar krive uzimamo x. Formula (65) nam daje ($R = 0$)

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx \\ &= -\frac{14}{15} \ . \end{aligned}$$

Primjer. Izračunati: $\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, gdje je L kružnica odredjena sferom $x^2+y^2+z^2=a^2$ i ravni $y=x$. Pri tome je smjer integracije suprotan kretanju kazaljke na satu, ako se gleda iz pozitivnog dijela x-ose.



Za parametar očigledno možemo izabrati ugao izmedju radijus-vektora tačke na kružnici i ekvatorijalne ravni. Iz sfernih koordinata onda imamo

$$x=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t\ ,\ y=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos t\ ,\ z=a\sin t,$$

pri čemu se zbog zadate orijentacije, parametar t mijenja od 0 do 2π. Sada na osnovu formule (65) imamo

$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=$

$$\begin{aligned}= & \int_0^{2\pi}\left[-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\sin t)\sin t-\right.\\ - & \left.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}(\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)\sin t\right]dt=0\ .\end{aligned}$$

18. Nezavisnost integracije od putanje. Grinova formula

Nezavisnost integracije od putanje

Krivolinijski integral druge vrste u opštem slučaju zavisi od putanje po kojoj se vrši integracija. Medjutim, to nije uvijek slučaj.

Ukoliko izraz $Pdx+Qdy+Rdz$ predstavlja totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y,z)$, onda integral vektora $(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ po luku $L=AB$ zavisi samo od tačaka A i B, a ne i od linije kojom su te tačke povezane.

Teorem 18..1. *Neka je u oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna vektorska funkcija*

$$\overrightarrow{v} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)) \ .$$

Tada su sljedeća tvrdjenja ekvivalentna:

- *Postoji funkcija $u(x,y,z)$ sa neprekidnim prvim parcijalnim izvodima, definisana u oblasti V, takva da je*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y,z) \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y,z) \ , \ \frac{\partial u}{\partial z} = R(x,y,z) \ .$$

- Krivolinijski integral druge vrste $\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ po putanji $AB \subset V$, gdje su $A(x_0,y_0,z_0)$ i $B(x_1,y_1,z_1)$ početna, odnosno krajnja tačka te putanje, ne zavisi od oblika putanje, nego samo od tačaka A i B. Pri tome vrijedi

$$\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz = u(x_1,y_1,z_1) - u(x_0,y_0,z_0) \ .$$

- Krivolinijski integral

$$\oint_c Pdx+Qdy+Rdz$$

  po proizvoljnoj zatvorenoj putanji $c \subset V$ jednak je nuli.

Na osnovu gornjeg teorema jasno je da se problem izračunavanja krivolinijskog integrala druge vrste, kada on ne ovisi o putu integracije, svodi na raspoznavanje kada je podintegralna funkcija totalni diferencijal neke vektorske funkcije. Zato nam je od interesa dati još neki kriterijum za takvo "raspoznavanje".

Definicija 18..2. Za oblast $V \subset \mathbb{R}^3$ kažemo da je prosto povezana ako se svaka zatorena dio-po-dio glatka kriva $c \subset V$, može "stegnuti" u proizvoljnu tačku $M_0 \in c$, ostajući pri tome u oblasti V.

Strogu matematičku formulaciju pojma "stegnuti" ovdje nećemo razmatrati. Neka on ostane u domenu intuitivnog ali navedimo neke primjere prosto povezanih i nepovezanih oblasti.
Unutrašnjost proizvoljnog kruga i kvadrata su prosto povezane oblasti u $\mathbb{R}^2$, ali krug bez svog centra to nije.
U $\mathbb{R}^3$ primjer prosto povezane oblasti su lopta i kocka, takodje i oblast ograničena dvjema koncentričnim sferama. Torus je primjer oblasti u $\mathbb{R}^3$ koja nije prosto povezana.

Teorem 18..3. *Neka je u prosto povezanoj oblasti $V \subset \mathbb{R}^3$ zadata neprekdna vektorska funkcija $\overrightarrow{v} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ koja ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$ i $\frac{\partial R}{\partial y}$.*
Potreban i dovoljan uslov da integral $\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$, $AB \subset V$, ne zavisi od putanje AB, jeste da su ispunjeni uslovi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \ , \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \ .$$

Primjer. Izračunati:

$$\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \ ,$$

po putanji c koja predstavlja kručnicu $(x-3)^2 + y^2 = 1$.
Kako su $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ i $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ neprekidne u oblasti ograničenoj krivom c i kako su

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

i uz to neprekidne funkcije u istoj oblasti, to na osnovu Teorema 18..1 zaključujemo da je dati integral jednak 0.

Primjer. Izračunati:

$$\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \ ,$$

po putanji c koja predstavlja kručnicu $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.Za razliku od gornjeg primjera, ovdje su funkcije P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne u svim tačkama oblasti ograničenom krivom c osim u tački $(0,0)$, ali oblast datog kruga bez tačke $(0,0)$ nije prosto povezana pa se ne možemo pozvati na prethodne dvije teoreme. Zato sada imamo

$$\begin{aligned}
\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2}(-a\sin t) + \right. \\
\left. + \frac{a\cos t}{a^2} a\cos t \right) dt &= 2\pi \ .
\end{aligned}$$

18.1. Greenova formula

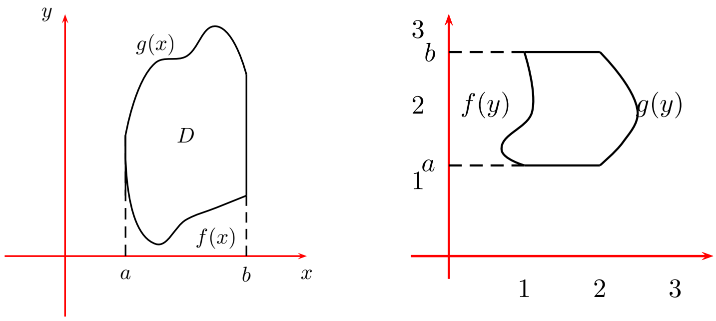
Veza izmedju dvojnog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti data je poznatom *Greenovom formulom*. Uočimo prostu zatvorenu krivu $c \subset \mathbb{R}^2$ koja ograničava oblast D.
Ako se c sastoji od dijelova grafika dviju neprekidnih funkcija f i g, definisanih na $[a,b]$ i takvih da je $f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a,b]$, i eventualno dijelova pravih $x = a$ i $x = b$, onda ćemo oblast D nazvati elementarnom oblašću u odnosu na osu Ox.
Na sličan bi način definisali elementarnu oblast u odnosu na osu Oy. Oblasti koje su elementarne u odnosu na obje ose zovemo prosto elementarnim oblastima.

Teorem 18..4 (Greenova teorema)**.** *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ oblast ograničena dio-po-dio glatkom krivom c. Ako su funkcije $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, na zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, tada važi jednakost*

$$\oint_{c^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \ . \tag{66}$$

Pri tome, oznaka c^+ u krivolinijskom integralu označava da se integracija vrši u smjeru pri kome tačke oblasti D uvijek ostaju s lijeve strane u odnosu na kretanje.

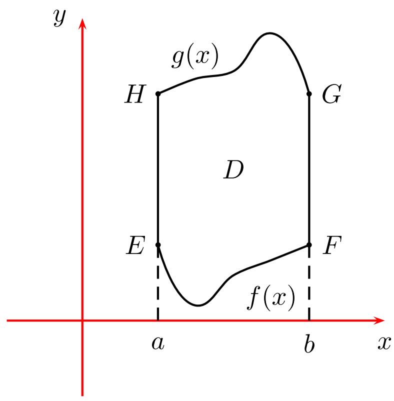
Dokaz
Pretpostavimo za početak da je oblast D elementarna oblast u odnosu na osu Ox. Dakle, neka je granica oblasti D kriva c odredjena jednačinama $y = f(x)$, $y = g(x)$



(a) Elementarna oblast u odnosu na Ox (b) Elementarna oblast u odnosu na Oy

Slika 23:

($f(x) \leq g(x)$ za $a \leq x \leq b$), zatim sa $x = a$ i $f(a) \leq y \leq g(a)$, kao i $x = b$, $f(b) \leq y \leq g(b)$, što je predstavljeno slikom



Sada imamo,

$$
\begin{aligned}
\int\int_{\overline{D}} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \\
&= \int_a^b \left(P(x,g(x)) - P(x,f(x))\right) dx \\
&= \int_a^b P(x,g(x))dx - \int_a^b P(x,f(x))dx \\
&= -\int_{GH} P(x,y)dx - \int_{EF} P(x,y)dx \,.
\end{aligned}
$$

Uzimajući u obzir da na pravama $x = a$ i $x = b$ vrijedi $dx = 0$, imamo

$$
\int_{HE} P(x,y)dx = 0 \ , \quad \int_{FG} P(x,y)dx = 0 \,,
$$

pa zajedno sa prethodnim vrijedi

$$\begin{aligned}\int\int_{\overline{D}} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy &= -\int_{GH} P(x,y)dx - \int_{HE} P(x,y)dx \\ &- \int_{EF} P(x,y)dx - \int_{FG} P(x,y)dx \ ,\end{aligned}$$

odnosno

$$\int\int_{\overline{D}} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint_{c^+} P(x,y)dx \ .$$

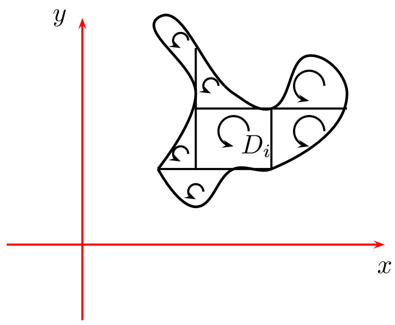
Na sličan način bi dobili

$$\int\int_{\overline{D}} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_{c^+} Q(x,y)dy \ .$$

Sabiranjem posljednje dvije jednakosti dobijamo traženu formulu

$$\oint_{c^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy \ .$$

Ako oblast D nije elementarna, onda je prvo pravim linijama paralelnim koordinatnim osama podijelimo na elementarne oblasti D_i, $i = 1, 2, ..., n$, što je prikazano na slici.



Nakon toga na svaku podoblast D_i primjenimo dobijenu jednakost

$$\oint_{c_i^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{\overline{D}_i} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy \ ,$$

gdje je c_i granica oblasti D_i. Sabiranjem ovih jednakosti po $i = 1, 2, ..., n$, dobijamo formulu

$$\oint_{c^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy \ .$$

Pri tome treba uočiti da se krivolinijski integral druge vrste po onim granicama susjednih oblasti koje su im zajedničke, i nalaze se unutar oblsti D, pojavljuje uvijek dva puta i to krećući se suprotnim smjerovima, pa se svi ti integrali poništavaju zbog poznate nam osobine krivolinijskog integrala druge vrste. $\square$ Izvedimo i jednu primjenu krivolinijskog integrala druge vrste i Greenove teoreme. Ona se odnosi na izračunavanje površine ravnog lika.

Primjer. Neka je D zatvorena oblast u ravni Oxy, ograničena dio-po-dio glatkom krivom c. Poznato nam je da vrijedi

$$mes(D) = \int\int_D dxdy \ .$$

S druge strane, koristeći Greenovu formulu, uzimajući $P(x,y) = 0$ i $Q(x,y) = x$, dobijamo vezu

$$\int\int_D dxdy = \oint_{c^+} xdy \ .$$

Ako uzmemo $P(x,y) = -y$ i $Q(x,y) = 0$, dobija se

$$\int\int_D dxdy = -\oint_{c^+} ydx \ .$$

Objedinjujući gornje, dobijamo formulu za izračunavanje površine ravne figure

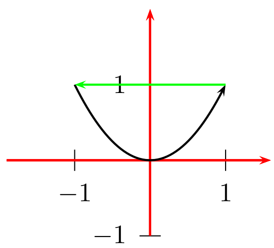
$$mes(D) = \int\int_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_{c^+} xdy - ydx \ .$$

U sljedećem primjeru ilustovat ćemo primjenu Greenove teoreme.

Primjer. Izrčunati:

$$\int_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \ ,$$

gdje je c luk parabole $y = x^2$, od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.



Oblast D koju posmatramo u Greenovoj teoremi je zatvorena i ograničena, pa je linija c koja je ograničava, zatvorena linija. Dakle, da bi mogli primjeniti Greenovu teoremu, neophodno je da putanja integracije bude zatvorena kontura, što u našem primjeru nije slučaj.

S druge strane, motiv za primjenu Greenove teoreme je činjenica da vrijedi uslov

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

jer je u tom slučaju izraz na desnoj strani u (66) jednak 0. Kod nas je taj uslov zadovoljen, tj. vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

a to znači da bi bilo dobro iskoristiti Greenov teorem. U tom cilju našu putanju integracije (dio parabole), zatvorimo proizvoljnom krivom (zatvaranje treba izvesti sa krivom po kojoj je krivolinijska integracija lahka). Neka to bude prava koja spaja tačke A i B, tj. linija

$$l: \ \ y = 1 \ , \ -1 \leq x \leq 1 \ .$$

Sada je $c \cup l$ zatvorena putanja, pa vrijedi

$$\int_{c \cup l} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0 \ .$$

S druge strane, prema pravilima za krivolinijski integral drugwe vrste, imamo

$$\int_{c \cup l} \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy +$$

$$+ \int_l \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \ .$$

Iz posljednje dvije jednakosti onda vrijedi

$$\int_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = -\int_l \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy \ .$$

Kako je na krivoj l, $y = 1$, odnosno $dy = 0$, onda je

$$\int_l \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = arctgx \,|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} \ .$$

Dakle,

$$\int_c \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = -\frac{\pi}{2} \ .$$

19. Diferencijalne jednačine

Diferencijalne jednačine

Definicija 19..1. Diferencijalna jednačina (n-tog reda) je jednačina oblika

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je x nezavisna promjenljiva, y nepoznata funkcija, a $y', y'', \ldots$ su izvodi nepoznate funkcije.

Primjer.

$$2xy'' - (x-3)y' - 2y = 6x \sin x$$
$$y''' - 9y = 0.$$

Rješenje diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja zadovoljava tu diferencijalnu jednačinu.

Primjer. Pokazati da je funkcija $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$, gdje su c_1, c_2 proizvoljne konstante, rješenje jednačine

$$y'' + 9y = 0.$$

Ako se u y pojavljuje n proizvoljnih konstanti, onda je ona *opće rješenje* DJ n-tog reda. Ako nema proizvoljnih konstanti, onda je y *partikularno rješenje*.
Na primjer, $y = \sin 3x + 2\cos 3x$ je partikularno rješenje u gornjem primjeru. Tipovi diferencijalnih jednačina čija se rješenja mogu izraziti pomoću konačnog broja elementarnih funkcija i njihovih integrala su veoma malobrojni. To posebno vrijedi za jednačine drugog i višeg reda, gdje postoje samo posebni slučajevi koji se mogu riješiti elementarno u gore navedenom smislu.
Historijski gledano, njihov značaj je veliki jer su prva saznanja o diferencijalnim jednačinama i stečena proučavanjem takvih tipova jednačina, počevši od Newtona i Leibnitza.
Kako je osnovni momenat njihovog rješavanja uvijek bila integracija kao postupak inverzan izvodu, takvi tipovi jednačina se nazivaju integrabilnim, postupak rješavanja nazivamo integracija, a samo rješenje se zove *integral diferencijalne jednačine*. U prvom dijelu posmatrat ćemo jednačine prvog reda, tj. rješavat ćemo problem

$$y' = f(x,y) \ , \tag{67}$$

sa početnim (inicijalnim) uslovom

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

19.1. Jednačina sa razdvojenim promjenljivima

Jednačina sa razdvojenim promjenljivima
To je jednačina kod koje se u (67) desna strana može napisati kao proizvod dviju funkcija od kojih jedna zavisi samo od x, a druga samo od y, tj. jednačina koja ima formu

$$y' = f(x)g(y) \ . \tag{68}$$

Sljedećim teoremom dati su uslovi za postojanje i jedinstvenost rješenja jednačine (68).

Teorem 19..2. *Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu (a,b) i neka je funkcija $g(y)$ neprekidna i različita od nule na intervalu (c,d). Tada postoji jedinstveno rješenje jednačine (68) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a,b)\ ,\ y_0 \in (c,d)$) i definisano je u nekoj okolini tačke x_0.*

Primjer. Riješiti jednačinu: $xy' = \dfrac{y}{y+1}$.Jednačinu dovodimo u oblik

$$y' = \frac{y}{x(y+1)} \ ,$$

iz koga uočavamo da je data jednačina sa razdvojenim promenljivima ($f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = \frac{y}{y+1}$). Razdvajamo promjenljive koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{(y+1)dy}{y} = \frac{dx}{x} \ .$$

Sada integralimo posljednju jednačinu i rješavanjem integrala na lijevoj i desnoj strani dobijamo rješenje diferencijalne jednačine, $y + \ln y = \ln x + C$.

Primjer. Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine $y' = 6y^2x$ koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$.
Data diferencijalna jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima. Zato prvo razdvojimo promjenljive

$$y' = \frac{dy}{dx} = 6y^2x \iff \frac{dy}{y^2} = 6xdx \; .$$

Nakon integriranja posljednje jednakosti

$$\int y^{-2}dy = 6\int xdx \; ,$$

dobijamo

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + C \; ,$$

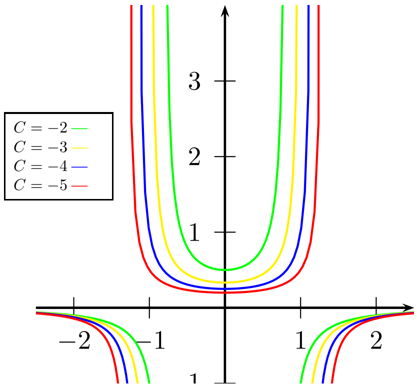
odnosno, rješenje diferencijalne jednačine je

$$y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C} \; ,$$

gdje je C proizvoljna realna konstanta. Za razne C imamo različite funkcije rješenja, što je prikazano na Slici **??**.
Naći ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(1) = \frac{1}{25}$, znači od svih funkcija izabrati onu za koju je C odredjen ovim uslovom, tj.

$$\frac{1}{25} = -\frac{1}{3 + C} \; ,$$

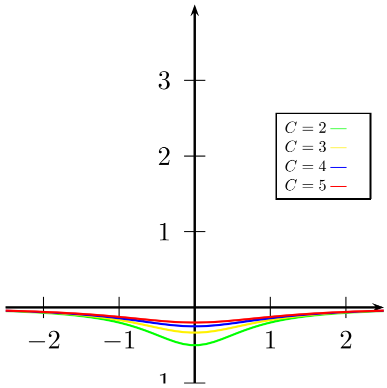
odakle nakon kraćeg računa dobijamo $C = -28$, čiji je graf dat na Slici 26.



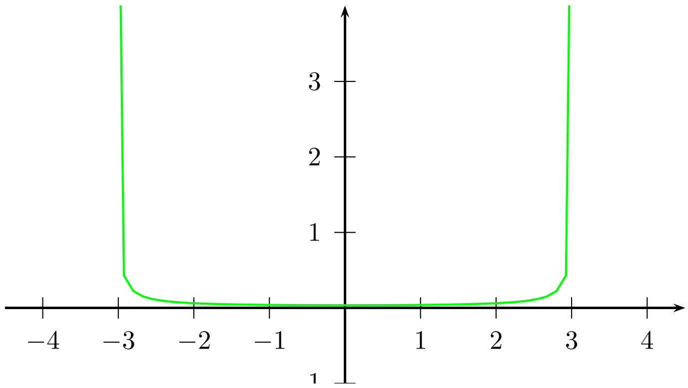
Slika 24: Grafovi rješenja za $C < 0$

19.2. Homogena jednačina

Homogena jednačina



Slika 25: Grafovi rješenja za $C > 0$



Slika 26: Graf funkcije $y(x) = -\frac{1}{3x^2-28}$

Homogena jednačina je jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) , \tag{69}$$

gdje je f neprekidna funkcija u nekom intervalu (a, b). Datu jednačinu riješavamo smjenom

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} ,$$

odakle se nalaženjem izvoda po x ima

$$y'(x) = u'(x)x + u(x) .$$

Ubacujući posljednje dvije jednakosti u jednačinu (69), dobijamo jednačinu

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

koja predstavlja jednačinu sa razdvojnim promjenljivima.

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Prvo uočimo da desnu stranu date jednačine možemo trnsformisati, tj.

$$y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} ,$$

odakle je očigledno da je data jednačina homogena. Sada uvodimo smjenu

$$u = \frac{y}{x} \ , \ \ y' = u'x + u \ .$$

Polazna jednačina sada dobija oblik

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \ ,$$

odnosno

$$u' = \frac{2u}{x(1-u)} \ .$$

Posljednja jednačina je jednačina sa razdvojenim promjenljivima, čijim rješavanjem prema ranije izloženom postupku dobijamo

$$\frac{1}{2}(\ln u - u) = \ln x + C \ ,$$

odnosno, vraćajući smjenu

$$\frac{1}{2}\left(\ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) = \ln x + C \ .$$

Primjer. Odrediti ono rješenje diferencijalne jednačine

$$y' = \frac{2x}{y} + \frac{y}{x} \ ,$$

koje zadovoljava uslov $y(1) = 2$. Nakon smjene $u = \frac{y}{x}$, odakle je $y' = u'x + u$, dobijamo diferencijalnu jednačinu po u

$$u'x = \frac{2}{u} \ ,$$

a to je jednačina sa razdvojenim promjenljivima

$$udu = \frac{2dx}{x} \ .$$

Integraleći ovu jednačinu dobijamo

$$\frac{u^2}{2} = 2(\ln x + C) \ ,$$

odnosno, rješenje po u je

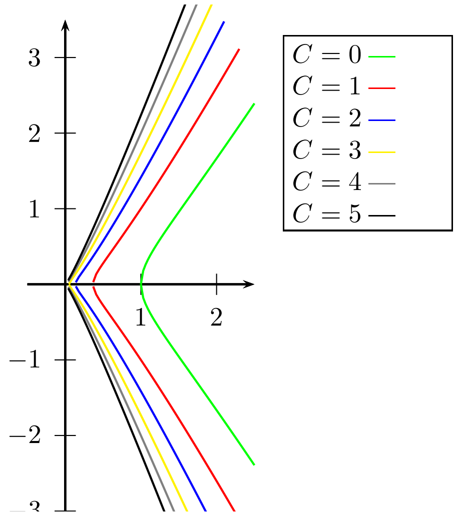
$$u(x) = \pm 2\sqrt{\ln x + C} \ .$$

Vraćajući se na polaznu funkciju y, imamo

$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln x + C} \ .$$

Koristeći uslov $y(1) = 2$, jasno je da od gornja dva rješenja koristimo ono sa znakom $+$, a onda dobijamo jednačinu po C

$$2\sqrt{C} = 2 \ ,$$



Slika 27: Grafik funkcije $y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln x + C}$

odakle je $C = 1$. Dakle rješenje zadatka je funkcija

$$y(x) = \pm 2x\sqrt{\ln x + 1}\ .$$

Ideju rješavanja iz prvog primjera primjenjujemo generalno na rješavanje diferencijalnih jednačina oblika

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy}\ .$$

Medjutim, ako imamo jednačinu oblika

$$y' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}\ , \tag{70}$$

jasno je da gornja ideja nije primjenljiva. Ali i ovakve jednačine rješavamo na sličan način, prvo ih transformišući sljedećim smjenama.

$$x = u + \alpha\ \ ,\ \ y = v + \beta\ ,$$

gdje su α i β proizvoljni realni brojevi. Uvrštavajući ove smjene u jednačinu (70), dobijamo

$$y' = \frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{du + ev + d\alpha + e\beta + f}\ . \tag{71}$$

Povoljnim izborom za α i β, tj. birajući ih tako da bude zadovoljen sistem

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c &= 0 \\ d\alpha + e\beta + f &= 0\ , \end{aligned}$$

jednačina (70) prelazi u poznati nam oblik jednačine. Naravno, sistem iz koga odredjujemo vrijednosti za α i β će imati rješenje ako je njegova determinanta različita od nule, tj. ako vrijedi uslov $ae - bd \neq 0$.

20. Linearna jednačina

Linearna jadnačina
Diferencijalnu jednačina oblika

$$y' + f(x)y = g(x) \ , \tag{72}$$

gdje su f i g proizvoljne neprekidne funkcije, nazivamo *linearna diferencijalna jednačina*.
Posmatrajmo sljedeću tehniku nalaženja rješenja jednačine (72), neočekivana ali jako korisna. Pomnožimo nekom funkcijom $\mu(x)$ jednačinu (72) dakle,

$$\mu(x)y' + \mu(x)f(x)y = \mu(x)g(x) \ . \tag{73}$$

Neočekivanu ulogu ove funkcije $\mu(x)$, kakva god ona bila, pojačajmo i zahtjevom

$$\mu(x)f(x) = \mu'(x) \ . \tag{74}$$

Stavljajući (74) u (73), dobijamo

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = \mu(x)g(x) \ , \tag{75}$$

i primjećujemo da je tada izraz na lijevoj strani izvod proizvoda, tj.

$$\mu(x)y' + \mu'(x)y = (\mu(x)y)' \ , \tag{76}$$

te stavljajući (76) u (75), dobijamo

$$(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x) \ . \tag{77}$$

Integrirajmo sada jednačinu (77), imamo

$$\int (\mu(x)y)'dx = \int \mu(x)g(x)dx \ ,$$

odnosno, primjenjujući poznato pravilo za neodredjeni integral, slijedi

$$\mu(x)y + C = \int \mu(x)g(x)dx \ . \tag{78}$$

Kako nam je cilj naći funkciju $y(x)$, onda iz (78) lagano računamo

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + C}{\mu(x)} \ , \tag{79}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je konstanta integracije C nepoznata, pa smo njen zapis na desnoj strani, jednostavnosti radi, zapisali sa $+C$, a ne kako bi račun dao sa $-C$. Posljednom jednačinom mi smo dobili rješenje jednačine (72). Ostaje "samo" da se odgonetne, a šta je ona neočekivana funkcija $\mu(x)$. Iz jednačine (74) imamo

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = f(x) \iff (\ln \mu(x))' = f(x) \ .$$

Opet, integrirajući posljednju jednakost, dobijamo

$$\ln \mu(x) + D = \int f(x)dx \ ,$$

pa po istom principu kao malo prije, možemo pisati

$$\ln \mu(x) = \int f(x)dx + D \ .$$

Eksponencirajući obje strane posljednje jednakosti, i koristeći pravila stepenovanja, imamo

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx + D} = e^D e^{\int f(x)dx} \ .$$

Kako je i e^D konstanta, ne gubeći na opštosti, konačno imamo

$$\mu(x) = De^{\int f(x)dx} \ , \tag{80}$$

i uobičejeno se ovakve funkcije sa ovakvom ulogom nazivaju *integracioni faktor*. Stavljajući (80) u (79), slijedi

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\int De^{\int f(x)dx} g(x) + C}{e^{D\int f(x)dx}} \\ &= e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx} g(x) + \frac{C}{D}\right) \ , \end{aligned}$$

pa konačno uzimajući da je $\frac{C}{D}$ nova konstanta C, dobijamo krajnji oblik rješenja jednačine (72)

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(\int e^{\int f(x)dx} g(x) + C\right) \ .$$

Sve ovo gore rečeno iskazujemo tvrdjenjem

Teorem 20..1. *Neka su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na intervalu (a, b). Tada postoji jedinstveno rješenje jednačine (72) koje zadovoljava polazni uslov $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$) i definisano je u (a, b). Rješenje jednačine je dato sa*

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(C + \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)$$

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y' + xy - x^3 = 0$ i odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov $y(0) = 1$.
Dovedimo jednačinu na zahtijevani oblik

$$y' + xy = x^3 \ .$$

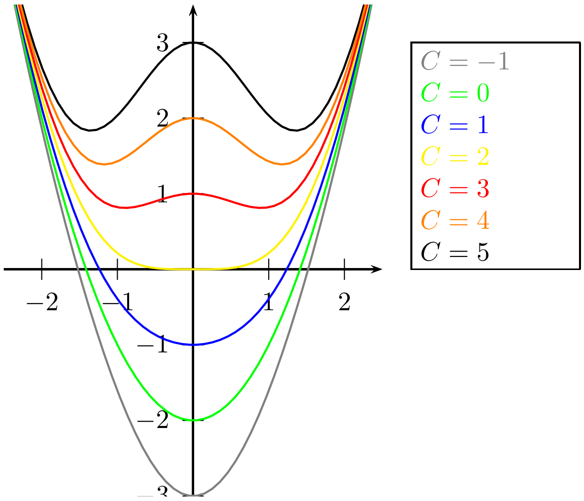
To je linearna jednačina kod koje je $f(x) = x$ i $g(x) = x^3$. Sada je rješenje dato sa

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int xdx}\left(C + \int x^3 e^{\int xdx}dx\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}dx\right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + (x^2-2)e^{\frac{x^2}{2}}\right) \end{aligned}$$

Postavljeni uslov daje nam jednačinu po C

$$1 = 1 \cdot (C + (0-2)\cdot 1) \ ,$$

iz koje dobijamo $C = 3$, a to je graf obojen crvenom bojom na Slici 28.



Slika 28: Grafik funkcije $y(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C+(x^2-2)e^{\frac{x^2}{2}}\right)$

20.1. Bernoullijeva jednačina

Bernoullijeva jednačina
To je jednačina oblika

$$y'+f(x)y=g(x)y^{\alpha}\ , \tag{81}$$

gdje je α proizvoljan realan broj različit od 0 i od 1 (u oba ova slučaja jednačina (81) bi se svela na linearnu jednačinu). Jednačinu (81) riješavamo smjenom

$$z(x)=(y(x))^{1-\alpha}\ ,$$

odakle se dobija

$$z'(x)=(1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x)\ .$$

Iz posljednje dvije jednakosti lako se dobija

$$y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}\quad ,\quad y'=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'$$

čijim uvrštavanjem u (81) i elementarnim računom imamo

$$z'+(1-\alpha)f(x)z=(1-\alpha)g(x)\ ,$$

tj. linearna jednačina po z.

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednačinu: $y'-y=xy^2$.
Data jednačina je Bernoullijeva jednačina sa $\alpha=2$, pa uvodimo smjenu

$$z=y^{1-2}=y^{-1}\ .$$

Sada računamo potrebne zamjene

$$y=z^{-1}\ ,\ y'=-z^{-2}z'$$

čijim uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo

$$-z^{-2}z' - z^{-1} = xz^{-2} .$$

Množenjem posljednje jednakosti sa $-z^2$ imamo

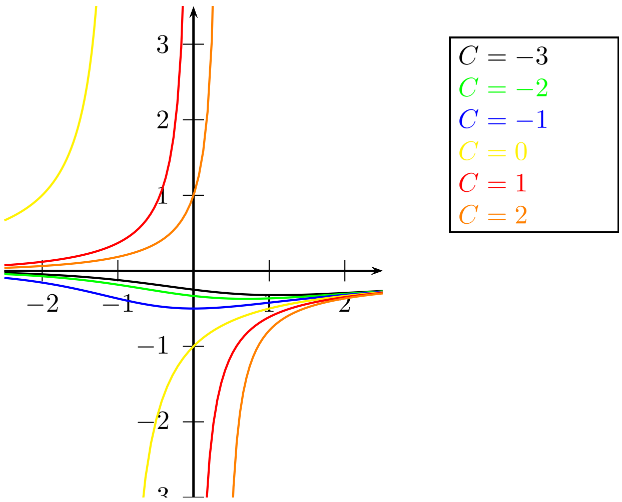
$$z' + z = -x ,$$

a to je linearna jednačina čije je rješenje

$$z = e^{-x}(C - (x+1)e^x) ,$$

odakle vraćajući se na polaznu funkciju y imamo

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C - (x+1)e^x)} .$$



Slika 29: Graf funkcije $y(x) = \frac{1}{e^{-x}(C-(x+1)e^x)}$

20.2. Jednačina totalnog diferencijala

Jednačina totalnog diferencijala
Opšta jednačina prvog reda u normalnom obliku

$$y' = f(x, y)$$

koristeći jednakost $y' = \frac{dy}{dx}$, može se pisati u obliku

$$dy - f(x, y)dx = 0 ,$$

što predstavlja specijalan slučaj jednačine

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 . \tag{82}$$

Ako postoji funkcija $F(x,y)$ takva da je lijeva strana u (82) totalni diferencijal te funkcije u nekoj oblasti, tj. da važi

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ ,$$

pri čemu je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \text{ i } \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \ ,$$

onda jednačinu (82) nazivamo *jednačina totalnog diferencijala*. Ako postoji funkcija $F(x,y)$ sa navedeim osobinama, onda zbog (82), tj. $dF(x,y) = 0$, vrijedi

$$F(x,y) = c \ \ , \ \ c \text{ konstanta} \ . \tag{83}$$

Jednakošću (83) je implicitno definisana funkcija $y = g(x)$ na nekom intervalu, i na tom intervalu je ta funkcija rješenje jednačine (82).
Napomenimo, da bi funkcija (83) definisala diferencijabilnu funkciju $y = g(x)$, funkcija F, tj. funkcije P i Q moraju zadovoljavati uslove teorema o implicitnoj funkciji.
Ostaje nam još odgovoriti na dva pitanja. Prvo, kako ustanoviti da lijeva strana u (82) jeste totalni diferencijal neke funkcije, i drugo, ako znamo da lijeva strana jeste totalni difernecijal neke funkcije, kako odrediti tu funkciju.

Teorem 20..2. *Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne funkcije u jednostruko povezanoj oblasti D. Da bi jednačina (82) bila jednačina totalnog diferencijala neophodno je i dovoljno da za svako $(x,y) \in D$ vrijedi*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \ . \tag{84}$$

Pri tome, funkcija $F(x,y)$ čiji je to totalni diferencijal data je sa

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \ ,$$

gdje je (x_0, y_0) proizvoljna tačka oblasti D.

Postavlja se pitanje šta učiniti ako uslov (84) nije ispunjen pa jednačina (82) nije jednačina totalnog diferencijala?Jedan od načina da se prevazidje taj problem jeste pronaći eventualno funkciju $h(x,y)$, različitu od nule, takvu da jednačina

$$h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

bude jednačina totalnog diferencijala. Funkcija $h(x,y)$, ukoliko postoji, naziva se *ntegracioni množitelj*. Potreban i dovoljan uslov za njeno postojanje imamo na osnovu iskazanog teorema, tj. mora vrijediti

$$\frac{\partial (hP)}{dy} = \frac{\partial (hQ)}{dx} \ ,$$

odnosno, nakon izračunavanja ovih parcijalnih izvoda

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \ . \tag{85}$$

Nalaženje integracionog množitelja predstavlja težak problem, čak složeniji i od samog polaznog problema i u opštem slučaju je nerješiv, jer bi u protivnom svaku jednačinu prvog reda $y' = f(x,y)$ mogli riješiti elementarno. Ovdje ćemo dati dva specijalna slučaja kada se integracioni množitelj ipak može eksplicitno izračunati. Ti slučajevi su okarakterisani specijalnim oblikom funkcije h koju tražimo i oni su

1. h je funkcija ovisna samo o promjenljivoj x

2. h je funkcija ovisna samo o promjenljivoj y.

U prvom slučaju, uslov (85) se svodi na jednačinu

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q \ .$$

Ova jednačina ima smisla samo ako je desna strana funkcija samo promjenljive x. Ukoliko je to slučaj, tj.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = u(x) \ ,$$

tada je

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = u(x) \ \text{ pa je } \ h(x) = Ce^{\int u(x)dx} \ .$$

Dakle zbog pojavljivanja konstante C, integracionih množitelja ima beskonačno mnogo, ali u konkretnim situacijama se uzima najprostiji, tj $C = 1$. Identična je situacija za slučaj 2.. Tada, ako je

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = v(y) \ ,$$

onda integracioni množitelj ovisi samo o y i dat je sa

$$h(y) = Ce^{\int v(y)dy} \ .$$

Primjer. Riješiti jednačinu: $dy - (y \operatorname{tg} x + \cos x)dx = 0$.
Provjerom uslova $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ lako utvrdjujemo da polazna jednačina nije jednačina totalnog diferencijala. Ostaje pokušati naći integracioni množitelj. Kako je

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)/Q = -\operatorname{tg} x \ ,$$

zaključujemo da integracioni množitelj postoji i da je on funkcija promjenljive x. Prema navedenoj formuli za ovaj slučaj, imamo

$$h(x) = Ce^{-\int \operatorname{tg} x dx} = \cos x \ .$$

Sada je jednačina

$$\cos x dy - \cos x(y \operatorname{tg} x + \cos x)dx = 0$$

jednačina totalnog diferencijala, i njeno je rješenje je dato sa

$$F(x,y) = -\int_{x_0}^{x} (y \operatorname{tg} t + \cos t)\cos t dt + \int_{y_0}^{y} \cos x dt \ ,$$

tj.

$$F(x,y) = \frac{y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2x_0) + 2y_0 \cos x_0}{2\cos x}$$

21. Linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Linearne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima
Opšti oblik linearne jednačine n-tog reda je

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \ ,$$

gdje za funkcije $f(x)$ i $a_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., n$) pretpostavljamo da su neprekidne funkcije na nekom segmentu I.
Mi ćemo se ovdje baviti isključivo linearnim jednačinama višeg reda kod kojih su funkcije $a_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., n$) konstantne funkcije (realne konstante), tj. razmatraćemo linearne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(x) \ .$$

21.1. Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Homogena jednačina sa konstantnim koeficijentima
Kao prvo riješit ćemo homogenu jednačinu, tj. jednačinu

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0 \ . \tag{86}$$

Tražeći rješenje u obliku

$$y(x) = e^{rx} \ ,$$

gdje je $r \in \mathbb{R}$, polazna jednačina postaje

$$(a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n)e^{rx} = 0 \ .$$

Kako je $e^{rx} \neq 0$, iz posljednje jednačine dobijamo jednačinu

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{87}$$

koju nazivamo *karakteristična jednačina* polazne homogene jednačine. Karakteristična jednačina je polinom stepena n pa ona ima n rješenja r_i ($i = 1, 2, ..., n$). Primjetimo da pojedina rješenja mogu biti i kompleksni brojevi. Kako nas zanimaju samo realna to će nam trebati sljedeća tvrdnja koja se lako dokazuje.

Lema 21..1. *Ako je $y(x) = u(x) + iv(x)$ rješenje jednačine (86) tada su njen realni i njen imaginarni dio takodje rješenja te jednačine.*

Pod ovim imamo u vidu sljedeće: Ako je $r_k = \alpha + i\beta$, tada je

$$y(x) = e^{r_kx} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \ ,$$

pa ako je $y(x)$ rješenje polazne homogene jednačine, tada su to i $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$.
Treba jos naglasiti da ako je jedno od rješenja kompleksan broj $\alpha + i\beta$, tada postoji i rješenje karakteristične jednačine koje je oblika $\alpha - i\beta$.
Pri tome, na osnovu gore rečenog, tom rješenju odgovara rješenje polazne jednačine koje se do na znak razlikuje od rješenja koje dobijemo pomoću rješenja $\alpha + i\beta$ karakteristične jednačine.
Ovo znači da ćemo paru konjugovano-kompleksnih rješenja $\alpha \pm i\beta$ karakteristične jednačine, dodjeljivati jedan par rješenja polazne jednačine, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Teorem 21..2. *Neka su $r_1, r_2, ..., r_s$ različita rješenja karakteristične jednačine (87), višestrukosti $m_1, m_2, ..., m_s$, pri čemu je $m_1 + m_2 + ... + m_s = n$. Tada su funkcije*

$$e^{r_i x}, xe^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, ..., x^{m_i - 1} e^{r_i x}\ ,\ i = 1, 2, ..., s \tag{88}$$

rješenja jednačine (86) i pri tome su ta rješenja linearno nezavisna.

Sa gornjom lemom i teoremom smo načelno opisali sva rješenja jednačine (86).

Primjer. Rješiti diferencijalnu jednačinu: $y''' - 3y' + 2y = 0$.
Rješenja tražimo u obliku $y = e^{rx}$ pa je karakteristična jednačina data sa

$$r^3 - 3r + 2 = (r-1)^2(r+2) = 0\ .$$

Različita rješenja ove jednačine su $r_1 = 1$, višestrukosti $m_1 = 2$ i $r_2 = -2$, višestrukosti $m_2 = 1$, dakle ukupno imamo $m_1 + m_2 = 3$ rješenja karakteristične jednačine. Rješenju $r_1 = 1$ odgovaraju funkcije e^x i xe^x (zbog višestrukosti 2), a rješenju $r_2 = -2$ odgovara funkcija e^{-2x}. Sada je rješenje polazne homogene jednačine dato sa

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-2x}\ .$$

Primjer. Rješiti diferencijalnu jednačinu:

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 4y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + 2y = 0\ .$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$r^6 - 2r^5 + 4r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 2r + 2 = (r^2+1)^2(r^2 - 2r + 2) = 0\ .$$

Rješenja karakteristične jednačine su $r_{1/2} = \pm i$, višestrukosti $m_{1/2} = 2$ i $r_{3/4} = 1 \pm i$, višestrukosti $m_{3/4} = 1$. Funkcije koje odgovaraju paru $r_{1/2}$ konjugovano-kompleksnih rješenja su

$$\cos x\ ,\ \sin x\ , x\cos x\ , x\sin x\ ,$$

a funkcije koje odgovaraju drugom paru su

$$e^x \cos x \text{ i } e^x \sin x\ .$$

Rješenje polazne jednačine je dato sa

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x) +$$
$$+ e^x (C_5 \cos x + C_6 \sin x)\ .$$

Primjer. Riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0\ ,$$

a zatim odrediti ono rješenje koje zadovoljava uslov

$$y(0) = 1\ ,\ y'(0) = -2\ ,\ y''(0) = -4\ .$$

Karakteristična jednačina zadate diferencijalne jednačine glasi

$$r^3 - 5r^2 - 22r + 56 = (r+4)(r-2)(r-7) = 0\ ,$$

i njena rješenja su

$$r_1 = -4\ ,\ r_2 = 2\ ,\ r_3 = 7\ .$$

Rješenja su realna i različita (višestrukosti 1), pa je rješenje jednačine

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} + C_3e^{7x} \; .$$

Nalazeći prvi i drugi izvod rješenja $y(x)$, postavljeni uslovi nam daju sljedeći sistem jednačina po nepoznatim konstantama C_1, C_2 i C_3,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= -4C_1 + 2C_2 + 7C_3 = -2 \\ y''(0) &= 16C_1 + 4C_2 + 49C_3 = -4 \; . \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je

$$C_1 = \frac{14}{33} \; , \; C_2 = \frac{13}{15} \; , \; C_3 = -\frac{16}{55} \; ,$$

te je traženo rješenje

$$y(x) = \frac{14}{33}e^{-4x} + \frac{13}{15}e^{2x} - \frac{16}{55}e^{7x} \; .$$

21.2. Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima

Nehomogena jednačina sa konstantnim koeficijentima
Sada ćemo razmatrati nehomogenu jednačinu n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \; .$$

Rješavanje ove jednačine se odvija u dva koraka.
Prvi korak: rješavamo odgovarajuću homogenu jednačinu na način izložen u prethodnoj sekciji. Pri tome dobijamo odgovarajuće rješenje $y_h(x)$.
Drugi korak: nalazimo bar jedno *partikularno rješenje* nehomogene jednačine, $y_p(x)$.

21.3. Metod jednakih koeficijenata

Metod jednakih koeficijenata
Rješenje polazne nehomogene jednačine je tada dato sa

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \; .$$

Za neke specijalne oblike funkcije $f(x)$, jedno *partikularno rješenje* polazne jednačine možemo odrediti jednostavnom metodom koju nazivamo *metod jednakih koeficijenata*.
1. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}$.
Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x} \; ,$$

gdje je $A \in \mathbb{R}$ konstanta koju treba odrediti.

Primjer. Rješiti jednačinu: $y'' - y = e^{2x}$.
Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i njena su rješenja $r_1 = 1$ i $r_2 = -1$ pa je $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.
U ovom slučaju je $\alpha = 2$ i vidimo nije rješenje karakteristične jednačine te partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Ae^{2x}$.
Nalazeći odgovarajuće izvode ove funkcije i ubacujući u polazu jednačinu, dobijamo

$$4Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} ,$$

odnosno

$$3A = 1 .$$

Dakle, $A = \frac{1}{3}$, a odgovarajuće partikularno rješenje je $y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$.
Konačno, rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} .$$

Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Ax^m e^{\alpha x} .$$

Primjer. Rješiti jednačinu: $y'' - y = e^x$.
Karakteristična jednačina je $r^2 - 1 = 0$ i rješenja su $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$.
Sada je $\alpha = r_1 = 1$ (višestrukosti 1) pa partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p = Axe^x$. Kako je $y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$, ubacujući ove podatke u polaznu jednačinu imamo

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x ,$$

odakle sredjivanjem dobijamo $A = \frac{1}{2}$, odnosno $y_p = \frac{1}{2}xe^x$, pa je rješenje polazne jednačine

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x .$$

2. Neka je $f(x) = P_k(x)$ (polinom stepena k).
Opet razlikujemo dva slučaja: Ako su sva rješenja karakteristične jednačine različita od nule, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Q_k(x)$, tj. u obliku polinoma k-tog stepena čije koeficijente treba odrediti.

Primjer. Riješiti jednačinu: $y'' - 3y' + 2y = x + 1$.
Karakteristična jednačina je $r^2 - 3r + 2 = 0$ i njena rješenja su $r_1 = 1$ $(m_1 = 1)$ i $r_2 = 2$ $(m_2 = 1)$, te je $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$.
Kako nula nije korijen karakteristične jednačine, a desna strana je polinom prvog stepena, partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = Ax + B$. Sada su $y_p' = A$ i $y_p'' = 0$, pa ubacujući to u polaznu jednačinu imamo,

$$-3A + Ax + B = x + 1 \text{ tj. } Ax + (-3A + B) = x + 1 ,$$

odakle izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ -3A + B &= 1 \,. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo tražene koeficijente, $A = 1$, $B = 4$, pa je partikularno rješenje dato sa $y_p(x) = x + 4$, a rješenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 4 \,.$$

Ako je 0 rješenje karakteristične jednačine višestrukosti m, onda partikularno rješenje tražimo u obliku $y_p(x) = x^m Q_k(x)$.

Primjer. Riješiti jednačinu: $y''' + 2y' = x - 1$.
Karakteristična jednačina je $r^3 + 2r = 0$ i njena rješenja su $r_1 = 0$ ($m_1 = 1$), $r_{2/3} = \pm i\sqrt{2}$ ($m_{2/3} = 1$). Rješenje homogene jednačine je $y_h(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x$.

Kako je $0 (= r_1)$ korijen karakteristične jednačine, partikularno rješenje ne tražimo u obliku polinoma prvog stepena nego kao $y_p(x) = x(Ax + B)$. Sad su $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$ i $y_p''' = 0$, pa stavljajući sve ovo u polaznu jednačinu imamo

$$4Ax + 2B = x - 1 \,.$$

Izjednačavajući odgovarajuće koeficijente dobijamo $A = \frac{1}{4}$ i $B = -\frac{1}{2}$, tj. $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$.
Konačno rješenje je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 + C_2 \cos\sqrt{2}x + C_3 \sin\sqrt{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \,.$$

3. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$.
Ukoliko α nije rješenje karakteristične jednačine, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = Q_k(x)e^{\alpha x} \,.$$

Ukoliko α jeste rješenje karakteristične jednačine i to višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m Q_k(x)e^{\alpha x} \,.$$

4. Neka je $f(x) = e^{\alpha x}(a \sin\beta x + b \cos\beta x)$.
Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A \sin\beta x + B \cos\beta x) \,,$$

gdje su $A, B \in \mathbb{R}$ koeficijenti koje treba odrediti.
Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(A \sin\beta x + B \cos\beta x) \,.$$

5. Neka je $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}(a \sin\beta x + b \cos\beta x)$.

Ukoliko ne postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(Q_k^1(x)\sin\beta x + Q_k^2(x)\cos\beta x) \ ,$$

gdje su Q_k^1 i Q_k^2 polinomi istog stepena kao polinom P_k, čije koeficijente treba odrediti. Ako postoji rješenje karakteristične jednačine oblika $r = \alpha \pm i\beta$, višestrukosti m, partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(Q_k^1(x)\sin\beta x + Q_k^2(x)\cos\beta x) \ .$$

Ukoliko je funkcija na desnoj strani jednačine zbir više funkcija koje su nekog oblika od gore spomenutih, tj.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_l(x) \ , \tag{89}$$

tada se služimo sljedećim rasudjivanjem: neka je $y_{p1}(x)$ partikularno rješenje kada bi desna strana bila samo funkcija f_1, $y_{p2}(x)$ partikularno rješenje ako je desna strana samo funkcija f_2 i tako za svaku funkciju koja je sabirak na desnoj strani, tada partikularno rješenje nehomogene jednačine čija desna strana ima oblik (89), tražimo u obliku

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + ... + y_{pl}(x) \ .$$