1 Površinski Integral

Površinski integral
Na analogan način linijskom integralu, definisat ćemo i *površinske integrale*.
Neka je σ površ u 3-prostoru sa konačnom površinom i neka je $f(x,y,z)$ neprekidna funkcija definisana na σ. Podijelimo, kao prije, σ na mrežu $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ sa površinama $mes\ \sigma_1, mes\ \sigma_2, \dots, mes\sigma_n$ i formirajmo sumu

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) mes S_k,$$

gdje je (x_k^*, y_k^*, z_k^*) proizvoljna tačka iz σ_k. Sada nastavimo podjelu površi, dijeleći σ na sve više i više dijelova na takav način da se maksimalna dimenzija svakog odjeljka približava nuli kako $n \to \infty$. Ako se gornja suma približava limesu koji ne zavisi od načina kako smo podijelili površ niti od izbora tačaka (x_k^*, y_k^*, z_k^*), onda se ovaj limes naziva *površinski integral* funkcije $f(x,y,z)$ preko σ i označavamo ga sa

$$\int\int_{\sigma} f(x,y,z) dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) mes S_k.$$

Slijedeća teorema nam omogućava da izračunamo površinski integral ukoliko je površ data parametarski:

Teorem 1.1. *Neka je σ glatka parametarska površ čije su parametarske jednačine date sa*

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),$$

gdje (u,v) varira preko regije R u (u,v)-ravni. Ako je $f(x,y,z)$ neprekidna na σ, onda je

$$\int\int_{\sigma} f(x,y,z) dS = \int\int_{R} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv,$$

gdje je $r = \vec{i}x(u,v) + \vec{j}y(u,v) + \vec{k}z(u,v)$.

Primjer. Evaluirajte povšinski integral $\int\int_{\sigma} x^2 dS$ preko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

U slučaju da je σ površ oblika $z = g(x,y)$, možemo uzeti $x = u$ i $y = v$ kao parametre i izraziti

$$r = u\vec{i} + v\vec{j} + g(u,v)\vec{k},$$

iz čega dobijemo

$$\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Stoga je površinski integral

$$\int\int_{\sigma} f(x,y,z) dS = \int\int_{R} f(x,y,g(x,y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dudv$$

Na isti način možemo dokazati analogne rezultate kada je površ data kao funkcija x i z, odnosno, y i z.

Primjer. Izračunati površinski integral

$$\int\int_\sigma xzdS,$$

gdje je σ dio ravni $x + y + z = 1$ koji se nalazi u prvom oktantu.

Primjer. Izračunati površinski integral

$$\int\int_\sigma y^2z^2dS,$$

gdje je σ dio kupe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ koji leži između ravni $z = 1$ i $z = 2$.

1.1 Primjene površinskog integrala

Primjene površinskog integrala

Teorem 1.2. *Ako je σ glatka parmetarska površ u 3-prostoru, njena površina je data sa*

$$\int\int_\sigma dS.$$

1.2 Fluks

Fluks
U ovom dijelu diskutovat ćemo primjenu površinskih integrala kod vektorskih polja koja su povezana sa tokom fluida i elektrostatičnim silama. Međutim, ideje koje ćemo razviti su opće u prirodi i primjenjive su na druge vrste vektorskih polja.
Zainteresirani smo dakle za vektorska polja u 3-prostoru koja uključuju neku vrstu "toka", recimo tok fluida ili tok naelektrisanih čestica u elektrostatičnom polje na primjer. U slučaju toka fluida vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z)$ predstavlja brzinu čestice fluida u tački (x, y, z), dok te čestice teku duž 'linija toka' koje su tangencijalne na vektore brzine.
I slučaju elektrostatičnog polja, $\vec{F}(x, y, z)$ je sila koje ispoljava polje na maloj jedinici pozitivnog naboja u tački (x, y, z) i ti naboji se ubrzavaju duž 'električnih linija' koje su tangencijalne na vektore sile.

Orijentabilne površi
Za naše potrebe morat ćemo posmatrati neke osnovne ideje o površima. Većina površi koje susrećemo imaju dvije strane - sfera recimo ima svoju unutrašnjost i spoljašnjost, beskonačna horizontalna ravan ima gornju i donju stranu. Ovakve površi se nazivaju *dvostrane* površ.
Međutim, u matematici postoje površi sa samo jednom stranom - npr. Möbiusova traka. Ona ima samo jednu stranu u smislu da recimo buba koja se kreće po njoj može preći cijelu površinu trake bez da pređe preko neke ivice. Ovakve površi se nazivaju *jednostrane površi*.
Dvostrane površi se nazivaju orijentabilnim, dok se jednostrane nazivaju neorijentabilne. Mi ćemo se baviti samo orijentabilnim površima. U primjenama, veoma je važno moći razlikovati između dvije strane orijentabilne površi. Zbog ovoga, neka je σ orijentabilna površ koja ima jedinični normalni vektor $\vec{n}$ u svakoj tački. Vektori $\vec{n}$ i $-\vec{n}$ pokazuju u suprotnim pravcima, pa stoga služe za distinkciju dvije strane površi!

Moguće je dokazati da ako je σ orijentabilna glatka površ, onda je uvijek moguće da se izabere pravac vektora $\vec{n}$ u svakoj tački tako da $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ varira neprekidno preko površi. Ovi jedinični vektori onda formiraju *orijentaciju* površi. Kada je površ predstavljena parametarski, parametarske jednačine tvore prirodnu orijentaciju površi. Ako je glatka parametrizovana površ σ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$$

onda je jedinična normala data sa

$$\vec{n} = \vec{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|} \tag{1}$$

neprekidna vektorska funkcija od u i v. Tada jednačina (**??**) definiše orijentaciju površi i ovo nazivamo *pozitivnom* orijentacijom parametarski date površi σ i kažemo da $\vec{n}$ pokazuje u pozitivnom pravcu površi. Obratno za $-\vec{n}$.

Primjer. Sfera $r(u, v) = a \sin\phi \cos\theta\vec{i} + a \sin\phi \sin\theta\vec{j} + a \cos\phi\vec{k}$. Jedinična normala sa pozitivnom orijentacijom je

$$\vec{n} = \frac{1}{a}\vec{r}.$$

Ovaj vektor pokazuje u istom pravcu kao i vektor radijusa $\vec{r}$ (dalje od centra). Dakle, za datu parametrizaciju, pozivna orijentacija je napolje, a negativna unutra.

Posmatrajmo slijedeći problem: Neka je orijentabilna površ uronjena u nekompresibilni stabilni tok fluida i dalje pretpostavimo da je površ propusna tako da fluid može- prolaziti koz površ slobodno u svakom pravcu.
Trebamo naći neto zapreminu fluida Φ koja prolazi kroz površ po jedinici vremena, gdje pod neto zapreminom podrazumjevamo zapreminu koja prolazi kroz površ u pozitivnom pravcu minus zapremina koja prođe kroz površ u negativnom pravcu.
Kako bismo riješili ovaj problem, pretpostavimo da je brzina fluida u tački (x, y, z) na površi σ data sa

$$\vec{F} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}.$$

Neka je $\vec{n}$ jedninična normala prema pozitivnoj strani σ u tački (x, y, z) i neka je $\vec{T}$ jedinični vektor koji je ortogonalan na $\vec{n}$ i leži u ravni $\vec{F}$ i $\vec{n}$.
Vektor brzine se može razložiti na dvije ortogonalne komponente - komponentu $(\vec{F} \cdot \vec{T})\vec{t}$ duž 'lica' površi i komponentu $(\vec{F} \cdot \vec{n})\vec{n}$ koja je perpendikularna na σ.
Komponenta brzine duž lica površi ne doprinosi protoku kroz σ, pa je stoga možemo zanemariti! Također primjetite da znak $\vec{F} \cdot \vec{n}$ određuje pravac protoka - pozitivan znak znači protok u pravcu $\vec{n}$, a negativan suprotan od pravca $\vec{n}$. Kako bismo riješili ovaj problem, podijelimo površ σ na n dijelova $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sa površinama $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$.
AKo su dijelovi mali i tok nije previše eratičan, realno je pretpostaviti da se brzina ne mijenja značajno na svakom od dijelova. Stoga, ako je (x_k^*, y_k^*, z_k^*) bilo koja tačka u σ_k, možemo pretpostaviti da je $\vec{F}(x, y, z)$ konstanta i jednak $\vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ na cijelom dijelu, te da je komponenta brzine preko dijela površi σ_k

$$\vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*).$$

Stoga možemo interpretirati

$$\vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

kao približnu zapreminu fluida koju prolazi kroz dio σ_k u pravcu $\vec{n}$ po jedinici vremena. Stoga suma

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

mjeri približno zapreminu fludia koji prolazi kroz površ σ u pravcu njene orijentacije $\vec{n}$ u jedinici vremena.

Definicija 1.3. Ako povećamo n na takav način da se maksimalna dimenzija svakog odjeljka približava nuli kako $n \to \infty$, granična vrijednost

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \vec{F}(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot \vec{n}(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

predstavlja tačnu neto zapreminu fluida koji prođe kroz površ σ u pravcu orijentacije $\vec{n}$ po jedinici vremena. Vrijednost Φ se naziva *fluks od $\vec{F}$ preko σ*. Može se izraziti kao površinski integral

$$\Phi = \int\int_{\sigma} \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)dS.$$

Pozitivan fluks znači da veća količina fluida protiče u pozitivnom pravcu nego u negativnom i obratno.

Primjedba. Ako fludi ima gustinu ρ, onda $\Phi\rho$ predstavlja neto masu fluida koja proziče kroz σ po jedinici vremena.

Primjenivši prethodne rezultate, možemo dobiti efekticnu formulu za izračunavanje fluksa

Teorem 1.4. *Neka je σ glatka parametrizovana površ predstavljena pomoću vektorske jednačine $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ u kojoj (u, v) varira preko regije R u uv-ravni. Ako su funkcije komponente vektorskog polja $\vec{F}$ neprekidne na σ i ako $\vec{n}$ određuje pozitivnu orijentaciju σ, onda je*

$$\Phi = \int\int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}dS = \int_{R} \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) dudv,$$

gdje podrazumjevamo da je integrand na desnoj strani jednačine iskazan pomoću u i v.

Primjer. Naći fluks vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ preko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orijentisane napolje.

Orijentacija neparametarskih povši

Neparametarske površi oblika $z = g(x, y), y = g(z, x), x = g(y, z)$ mogu se izraziti parametarski koristeći nezavisne promjenljive kao parametre. U slučaju $z = g(x, y)$,

$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + g(u, v)\vec{k}.$$

U tom slučaju je vanjska normala data sa

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Analogno se dobiju i formule za druga dva slučaja. Svaka od ovih jednačina se dobije koristeći se gradijentima. Zapišimo jednačinu površi kao

$$z - g(x, y) = 0.$$

Ova jednačina je oblika $G(x, y, z) = 0$, pa se može posmatrati kao nivo površ funkcije $G(x, y, z)$. Kako je gradijent funkcije G normalan na nivo površ, slijedi da je jedinična normala $\vec{n}$

$$\frac{\nabla G}{|\nabla G|} \; ili \; -\frac{\nabla G}{|\nabla G|}.$$

Ostavljamo kao vježbu da se pokaže da ako površ prikažemo na bilo koji od tri gornja načina, imamo

$$\nabla G = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Stoga imamo

Teorem 1.5. *Neka je σ glatka površ oblika $z = g(x, y), y = g(z, x)$ ili $x = g(y, z)$ i pretpostavimo da su funkcije komponente vektorskog polja $\vec{F}$ neprekidne na σ. Pretpostavimo također da je jednačina za σ napisana u obliku $G(x, y, z) = 0$ i neka je R projekcija σ na koordinatnu ravan određenu nezavisnim promjenljivim od g. Ako σ ima pozitivnu orijentaciju, onda*

$$\Phi = \int\int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int\int_{R} \vec{F} \cdot \nabla G dA.$$

Primjer. Neka je σ dio površi $z = 1 - x^2 - y^2$ koji leži iznad Oxy ravni i neka je σ orijentisana prema gore. Naći fluks vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ preko σ.

1.3 Divergencijska teorema

Divergencijska teorema
Napomena - ova se teorema još naziva Gauusova ili teorema Gauss-Ostrogradski, zavisno od literature!
U ovoj sekciji ćemo biti zainteresovani za fluks preko površi, kao što su sfere, koje 'zatvaraju' regiju u prostoru.
Pokazat ćemo da se fluks preko takvih površi može izraziti pomoću divergencije vektorskog polja i dat ćemo pomoću toga i fizičku interpretaciju divergencije. U prošloj sekciji smo proučavali fluks preko općih površi. Sada ćemo posmatrati isključivo povši koje su granice konačnih solida - površ solidne sfere, solidne kutije, solidnog cilindra itd.
Ovakve površi se nazivaju *zatvorene* površi. Zatvorena povrp može ali i ne mora biti glatka, ali većina površi koja se pojavljuje u praksi je glatka dio po dio - tj. sastoje se od konačno mnogo glatkih površi koje su povezane na ivicama (kartonska kutija na primjer).
Ograničit ćemo promatranje na one dio po dio glatke površi kojima možemo pripisati unutrašnju i vanjsku orijentaciju. Prisjetimo se da je divergencija vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$$

data sa

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

Do sada nismo razmatrali fizičku interpretaciju takve strukture. Slijedeća teorema, *divergencijska* teorema daje interpretaciju divergencije u kontekstu toka fluida.

Teorem 1.6. *Neka je G solid čija je povšina σ orijetisana spolja. Ako je*

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}.$$

gdje f, g i h imaju neprekidne prve parcijalne izvode na nekim otvorenim skupovima koji sadrže G, onda je

$$\int\int_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int\int\int_G \mathrm{div}\vec{F} dV \tag{2}$$

Dokaz. Za sada izostavljamo. □

Primjedba. Eksplicitnije, divergencijska teorema kaže da je fluks vektorskog polja preko zatvorene povši sa vanjskom orijentacijom jednak trojnom integralu divergencije preko regije zatvorene s tom površi. Ovo se nekad naziva *vanjski fluks* površi.

Nekad je jednostavnije izračunati fluks preko divergencije, nego pomoću površinskog integrala.

Primjer. Iskoristiti divergencijsku teoremu kako bi našli fluks vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$ preko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Primjer. Naći fluks vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z^2\vec{k}$$

preko jedinične kocke u prvom oktantu pomoću divergencijske teoreme.

Primjer. Naći fluks vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$$

preko regije koja je zatvorena kružnim cilindrom $x^2 + y^2 = 9$ i ravnima $z = 0$ i $z = 2$.

Divergencijska teorema daje način interpretacije divergencije vektorskog polja $\vec{F}$. Pretpostavimo da je G *mala* sferična regija centrirana u tački P_0 i da je njena površina, označena sa σG orijentisana spolja. Označimo zapreminu regije sa $vol(G)$, te fluks polja $\vec{F}$ preko σG sa $\Phi(G)$.
Ako je div$\vec{F}$ neprekidno na G, onda se preko male regije G vrijednost div$\vec{F}$ ne mijenja mnogo u odnosu na vrijednost div$\vec{F}(P_0)$, pa stoga razumno možemo aproksimirati vrijednost divergencije pomoću konstante div$\vec{F}(P_0)$. Divergencijska teorema implicira da se fluks $\Phi(G)$ polja $\vec{F}$ preko $\sigma(G)$ može aproksimirati kao

$$\Phi(G) = \int\int_\sigma (G)\vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int\int\int_G \mathrm{div}\vec{F} dV \approx$$

$$\approx \mathrm{div}\vec{F}(P_0) \int\int\int_G dV = \mathrm{div}\vec{F}(P_0) vol(G).$$

Odavdje slijedi

$$\mathrm{div}\vec{F}(P_0) \approx \frac{\Phi(G)}{vol(G)},$$

što možemo onda preciznije izraziti kao

$$\text{div}\vec{F}(P_0) = \lim_{vol(G)\to 0} \frac{1}{vol(G)} \int\int_\sigma (G)\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

Ovo nam kaže da se u stalnom fluidnom toku, divergencija vektorskog polja $\vec{F}$ može interpretirati kao limitirajuću fluks po jedinici zapremine u tački.

Primjedba. Gornja formula se nekad uzima kao definicija divergencije!

1.4 Stokesova teorema

Stokesova teorema

U ovoj sekciji ćemo biti zainteresovani za površi u 3-prostoru koje su ograničene jednostavnim parametarskim krivima. Na takvoj orijentisanoj površi σ ograničenoj sa parametarskom krivom C, postoje dva moguća odnosa između orijentacija krive i površi.

Zamislimo osobu koja hoda duž krive C sa njegovom/njenom glavom u pravu orijentacije površi σ. Osoba onda hoda u pozitivnom pravcu krive C u odnosu na prijentaciju površi σ ako je površ sa lijeve strane te osobe, a u negativnom smjeru ukoliko mu je ona s desne strane (pravilo desne ruke). Već ste se ranije susretali (a ako niste, trebali ste!) sa *rotorom* vektorskog polja

$$\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$$

datim sa

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k},$$

što je možda jednostavije dato sa

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

Stokesova teorema

Teorem 1.7. *Neka je σ dio po dio glatka orijentisana površ koje je ograničena jednostavnom, zatvorenom, dio po dio glatkom krivom C sa pozitivnom orijentacijom. Ako su komponente vektorskog polja*

$$\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$$

neprekidne i imaju neprekidne prve parcijalne izvode na nekom otvorenom skupu koji sadrži σ, i ako je $\vec{T}$ jedinični tangentni vektor na C, onda je

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \int\int_\sigma (\text{rot }\vec{F})\cdot\vec{n}dS.$$

Primjedba. Integral na lijevoj stranu glavne formule predstavlja rad izvršen vektorskim poljem $\vec{F}$ na čestici koja putuje krivom C.
Zbog komputacijskih potreba obično taj integral izrazimo kao

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

gdje je $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$,

što već izgleda poznatije.

Primjer. Naći rad koji izvrši polje

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + 4xy^3\vec{j} + y^2x\vec{k}$$

na čestici koja prelazi preko pravougaonika C na razni $z = y$ sa slike.

Nekada je zgodno posmatrati vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j}$$

u 2-prostoru kao vektorsko polje u 3-prostoru pomoću

$$\vec{F}(x, y) = f(x, y)\vec{i} + g(x, y)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Ako je R regija u xy ravni ogranilena jednostavnom, zatvorenom, dio po dio glatkom krivom C, onda možemo tretirati R kao ravnu površ. Dakle, ako orijentišemo R i C suprotno od kazaljke na satu posmatrajući odozgo sa pozitivnog dijela z-ose, dobivamo

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_R (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{k} dA.$$

Međutim, rotor je u ovom slučaju dosta jednostavan, naime

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Stoga dobivamo

$$\oint_C f dx + g dy = \int\int_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA,$$

što je Greenova teorema! Dakle dokazali smo da je Greenova teorema u stvari posebni slučaj Stokesove teoreme!