MATEMATIKA

Nermin Okičić
Vedad Pašić

Funkcije više promjenljivih : Integrabilnost

2016

MATEMATIKA

Sadržaj

Poglavlje 1

Višestruki integrali

U ovoj glavi bavit ćemo se konceptom određenog integrala za funkcije više varijabli i to uglavnom za funkcije dvije i tri varijable. Funkciju jedne varijable smo integrirali duž nekog segmenta, dok će integracija funkcije dvije varijable biti nad oblašću u 2D prostoru, a integracija funkcije tri varijable će biti nad nekom zapreminom u 3D prostoru. Pored tehnika izračunavanja ovih integrala, prezentovaćemo i primjene ovih integrala za računanje površina ravnih likova, zapremina, kao i neke fizikalne interpretacije.

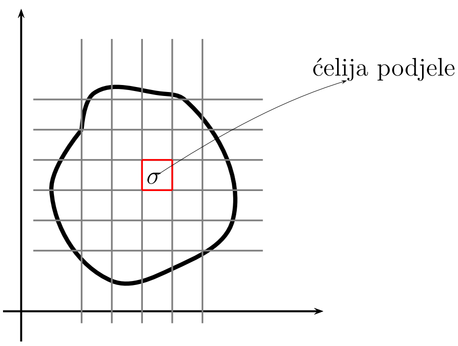
1.1 Integralne sume

Posmatrajmo proizvoljnu zatvorenu oblast $\overline{D}$, n-dimenzionalnog euklidskog prostora. Sa $mes(\overline{D})$ ćemo označavati mjerni broj veličine oblasti $\overline{D}$ (u slučaju dvodimenzionalne oblasti to je površina, za trodimenzionalnu oblast to je zapremina).

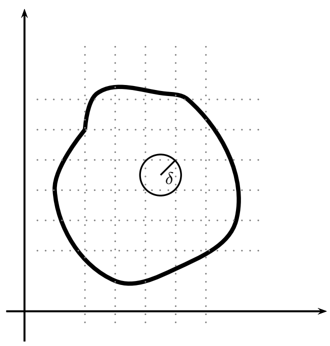
Definicija 1.1.1

Podjelu oblasti $\overline{D}$ nazivamo pravilnom ako se sastoji od dijelova (ćelija) te oblasti koji zadovoljavaju sljedeće osobine:

1. svaka ćelija je ograničena i ima ograničenu veličinu,
2. Dvije različite ćelije nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Zajedničke tačke dviju različitih ćelija mogu biti samo granične tačke tih ćelija,
3. svaka tačka oblasti $\overline{D}$ pripada bar jednoj ćeliji,
4. svaka ograničena figura koja sa svojom granicom leži u oblasti $\overline{D}$ može se sastojati iz konačnog broja ćelija.



(a) Pravilna podjela



(b) δ-ćelija pravilne podjele

Definicija 1.1.2

Ćeliju jedne podjele nazivamo δ-ćelijom ako oko nje možemo opisati sferu prečnika δ. Pravilna podjela se naziva δ-podjelom ako je svaka njena ćelija δ-ćelija.

Jasno je da su u jednoj δ-ćeliji bilo koje dvije tačke na rastojanju manjem ili jednakom δ. Podjele ćemo označavati uobičajeno sa σ. Različite podjele iste oblasti mogu se porediti ili biti neuporedive.

Definicija 1.1.3

Podjela σ_2 je produženje podjele σ_1 ako pri prelazu na podjelu σ_2 svaka ćelija podjele σ_1 ostaje nepromjenjena ili se dijeli novom pravilnom podjelom. Takođe kažemo u tom slučaju da je podjela σ_2 finija od podjele σ_1.

(c) Podjela σ_1 (d) Finija podjela σ_2

Slika 1.1: Prelaz iz jedne podjele u finiju podjelu.

Definicija 1.1.4

Neka je $\overline{D}$ proizvoljna zatvorena oblast i σ neka njena pravilna podjela. Neka je funkcija $f(X)$ ograničena na $\overline{D}$. Integralnom sumom funkcije f u oblasti $\overline{D}$ nazivamo svaku sumu oblika

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) mes(\sigma_i) \ ,$$

gdje su σ_i $(i = 1, ..., n)$ ćelije podjele σ, $X_i \in \sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ proizvoljne tačke.

Uporedo sa integralnim sumama funkcije f posmatrat ćemo i tzv. gornje i donje integralne sume:

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot mes(\sigma_i) \ \text{ i } \ \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot mes(\sigma_i) \ ,$$

gdje su

$$m_i = \inf_{X \in \sigma_i} f(X) \ , \ M_i = \sup_{X \in \sigma_i} f(X) \ , (i = 1, 2, ..., n) \ .$$

Ove sume nazivamo takođe i gornja, odnosno donja Darbouxova suma.

Za integralne sume vrijede sljedeća tvrđenja:

Teorem 1.1.1

Pri produženju podjele oblasti gornja suma ne raste, a donja suma ne opada.

Teorem 1.1.2

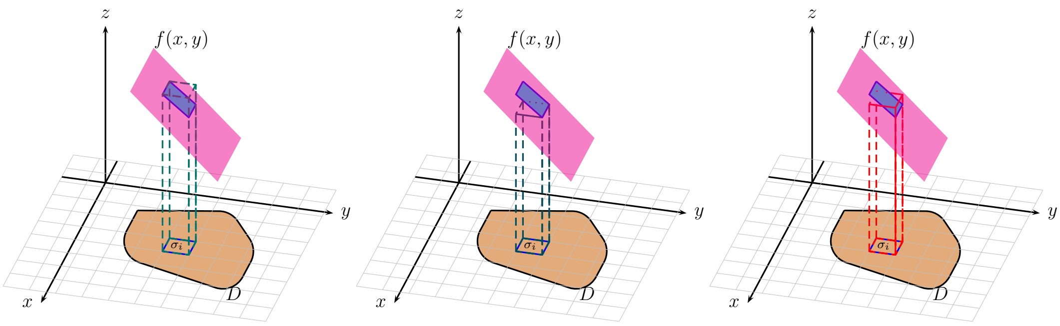
Donja suma je manja ili jednaka od gornje sume za proizvoljnu podjelu oblast.

Teorem 1.1.3

Za integralne sume vrijedi

$$m\ mes(\overline{D}) \leq \underline{S} \leq S \leq \overline{S} \leq M mes(\overline{D})\ ,$$

gdje je $m = \inf_{X \in \overline{D}} f(X)$, $M = \sup_{X \in \overline{D}} f(X)$.

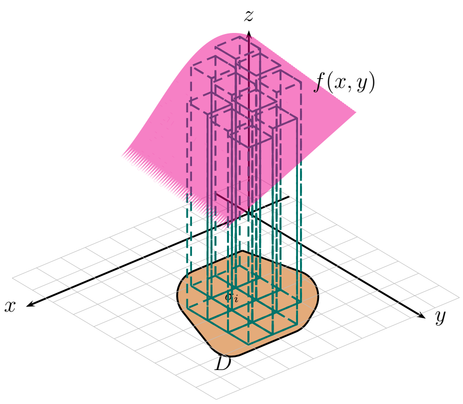


(a) Gornja Darbouxova suma (b) Donja Darbouxova suma (c) Integralna suma

Primjer 1.1. Za funkciju dvije promjenljive integralna suma je oblika

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) mes(\sigma_i)\ ,$$

gdje je $X_i(\xi_i, \eta_i) \in \sigma_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. $\diamondsuit$



Slika 1.2: Formiranje integralne sume funkcije $f(x, y)$ nad oblašću D.

1.2 Definicija višestrukog integrala

Neka je $S = \sum_{i=1}^{n} f(X_i) mes(\sigma_i)$, integralna suma funkcije $f(X)$ nas zatvorenom oblasti $\overline{D}$ pri podjeli σ.

Definicija 1.2.1

Broj I nazivamo višestrukim integralom funkcije f ili n-integralom nad oblašću $\overline{D}$ ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da važi

$$|S - I| < \varepsilon \ ,$$

za proizvoljnu pravilnu δ-podjelu oblasti $\overline{D}$.

Vidimo da je broj I izražen kao granični proces tojest, kao granična vrijednost integralnih suma,

$$I = \lim_{\max diam(\sigma_i) \to 0} S \ .$$

Definicija 1.2.2

Ako postoji jedinstvena i konačna granična vrijednost integralnih suma finkcije $f(X)$, kažemo da je funkcija integrabilna u datoj oblasti.

Jasno je da će maksimalan dijametar ćelija podjele težiti ka 0 ako pravimo sve sitniju i sitniju podjelu oblasti (tj. ako broj ćelija podjele raste). Tako onda imamo

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\max diam(\sigma_i)\to 0} S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)mes(\sigma_i) \\ &= \int\int ... \int_{\overline{D}} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_n \\ &= \int_{\overline{D}} f(X)d\sigma \ . \end{aligned}$$

Za funkciju dvije promjenljive $z = f(x, y)$, integrabilnu u oblasti $\overline{D}$, imamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)mes(\sigma_k) = \int_{\overline{D}} f(X)d\sigma = \iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy \ ,$$

pri čemu činjenica da $n \to \infty$ je ekvivalentna da $\max diam(\sigma_k) \to 0$. Ovaj integral nazivamo *dvojni integral* funkcije $f(x, y)$ nad zatvorenom oblasti $\overline{D}$.

Za funkciju tri promjenljive $f(x, y, z)$ koja je integrabilna u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$, po definiciji imamo

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)mes(\sigma_k) = \int_{\overline{D}} f(X)d\sigma = \iiint_{\overline{D}} f(x, y, z)dxdydz \ ,$$

i ovaj višestruki integral nazivamo *trojni integral* funkcije $f(x, y, z)$ nad zatvorenom oblasti $\overline{D}$.

Od kriterijuma za integrabilnost funkcije više promjenljivih navedimo,

Teorem 1.2.1

Funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$ integrabilna je u datoj oblasti.

1.3 Osobine integrabilnih funkcija

Sljedeće teoreme navodimo bez dokaza, iako se njihovo dokazivanje lahko izvodi koristeći definiciju višestrukog integrala, potpuno analogno odgovarajućim teoremama za funkciju jedne promjenljive.

Teorem 1.3.1: Aditivnost integrala po podintegralnoj funkciji

Neka su f i f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ integrabilne funkcije u zatvorenoj oblasti $\overline{D}$ i neka je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta. Tada vrijedi:

1. $\int_{\overline{D}}(f_1(X) \pm ... \pm f_n(X))d\sigma = \int_{\overline{D}} f_1(X)d\sigma \pm ... \pm \int_{\overline{D}} f_n(X)d\sigma$.
2. $\int_{\overline{D}} Cf(X)d\sigma = C \int_{\overline{D}} f(X)d\sigma$.

Teorem 1.3.2: Aditivnost po oblasti integracije

Za proizvoljnu podjelu oblasti integracije $\overline{D}$ na disjunktne parcijalne oblasti $\overline{D_1}, \overline{D_2}, ... \overline{D_n}$, važi

$$\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma = \int_{\overline{D_1}} f(X)d\sigma + \int_{\overline{D_2}} f(X)d\sigma + ... + \int_{\overline{D_n}} f(X)d\sigma \ ,$$

pri čemu je funkcija $f(X)$ integrabilna u svakom dijelu $\overline{D_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ukoliko je ona integrabilna u $\overline{D}$ i obrnuto.

Teorem 1.3.3

Ako sa m i M označimo infimum i supremum integrabilne funkcije $f(X)$ u $\overline{D}$, tada vrijedi procjena

$$mes(\overline{D})m \leq \int_{\overline{D}} f(X)d\sigma \leq mes(\overline{D})M \ .$$

Teorem 1.3.4

Ako u zatvorenoj oblasti vrijedi $f(X) \geq 0$ $(f(X) \leq 0)$, tada vrijedi

$$\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma \geq 0 \quad \left(\int_{\overline{D}} f(X)d\sigma) \leq 0\right) \ .$$

Za primjenu višestruke integracije posebno je važan sljedeći teorem.

Teorem 1.3.5

Ako je $f(X) = 1$ za svako $X \in \overline{D}$, tada je

$$\int_{\overline{D}} f(X) d\sigma = \int_{\overline{D}} d\sigma = mes(\overline{D}) \ .$$

U slučaju dvojnog integrala gdje je oblast integracije iz dvodimenzionalnog euklidskog prostora, ovo znači da dvojni integral $\iint \overline{D} dxdy$ predstavlja površinu oblasti $\overline{D}$, a u slučaju trojnog integrala izraz $\iiint_{\overline{D}} dxdydz$ predstavlja zapreminu oblasti $\overline{D}$.

1.4 Dvojni integral

1.4.1 Dvojni integral po pravougaonoj oblasti

Posmatrat ćemo prvo najidealniju varijantu integracije, po pravougaonoj oblasti. Neka je funkcija $f(x, y)$ definisana u zatvorenom pravougaoniku

$$\overline{D}: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \ .$$

Definicija 1.4.1

Neka je funkcija

$$\Phi_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

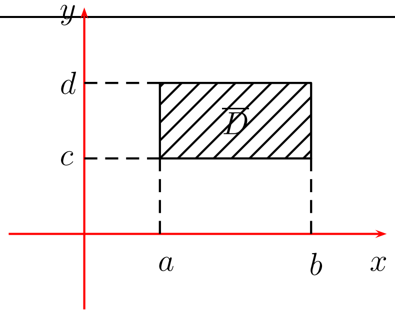
integrabilna za svako $x \in [a, b]$, tada integral

$$\int_a^b \Phi_1(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

nazivamo dvostrukim integralom funkcije $f(x, y)$ u zatvorenoj pravougaonoj oblasti $\overline{D}$ pri sukcesivnoj integraciji prvo po promjenljivoj y, a zatim po promjenljivoj x.

Takođe, možemo posmatrati funkciju

$$\Phi_2(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$



Slika 1.3: Pravougaona oblast.

za koju zahtjevamo da je integrabilna za svako $y \in [c, d]$, onda integral

$$\int_c^d \Phi_2(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

nazivamo dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ u oblasti $\overline{D}$ pri sukcesivnoj integraciji prvo po x, a zatim po y.

Teorem 1.4.1

Neka je funkcija $f(x, y)$ integrabilna u zatvorenoj pravougaonoj oblasti $\overline{D}$ (tj. neka postoji dvojni integral funkcije f) i neka za proizvoljno $x \in [a, b]$ postoji integral $\int_c^d f(x, y)dy$. Tada postoji dvostruki integral

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$$

i pri tome vrijedi

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \ .$$

Na sličan način pod odgovarajućim uslovima, važi

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \ .$$

Teorem 1.4.1 nam u stvari daje tehniku za izračunavanje dvojnog integrala nad pravougaonom oblasti. Ona se kako vidimo, svodi na prelazak iz dvojnog u dvostruki integral čije su granice u slučaju pravougaone oblasti, konstantne.

Kao posljedicu Teorema 1.4.1 i napomene iza nje, imamo

Posljedica 1. *Ako je funkcija $f(x, y)$ integrabilna u zatvorenom pravougaoniku $\overline{D}$ i ako postoje dvostruki integrali*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \ i \ \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \ ,$$

tada vrijedi

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \ .$$

Ovo nam u stvari govori da redoslijed integracije ne utiče na vrijednost dvojnog integrala.

Primjer 1.2. Izračunati integral $I = \iint_{\overline{D}} \cos(x+y)dxdy$, gdje je $\overline{D}$ kvadrat

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \ .$$

Dvojni integral I svodimo na dvostruki, tj.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx(\sin(x+y) \mid_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin x\right] dx = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \mid_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \mid_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \ . \end{aligned}$$

♢

Primjer 1.3. Izračunati: $I = \iint_D 6xy^2 dxdy$, gdje je D pravougaonik $[2,4] \times [1,2]$.

$$\begin{aligned} \int\int_D 6xy^2 dxdy &= \int_2^4 \left(\int_1^2 6xy^2 dy\right) dx = \int_2^4 \left(6x \int_1^2 y^2 dy\right) dx \\ &= \int_2^4 \left(6x \frac{y^3}{3}\bigg|_1^2\right) dx \\ &= \int_2^4 (16x - 2x)\, dx = 14 \int_2^4 xdx \\ &= 14 \ \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 = 84 \end{aligned}$$

♢

Primjetimo u gornjem primjeru da je podintegralna funkcija $f(x,y) = 6xy^2$ oblika $f(x,y) = g(x)h(y)$. Kod dvojnog integrala sa konstantnim granicama to možemo iskoristiti na sljedeći način

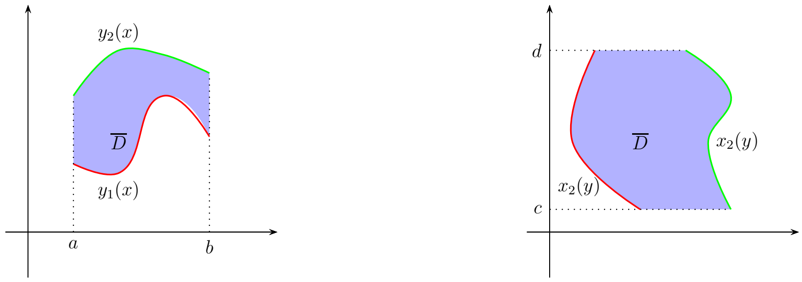
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D g(x)h(y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy \ .$$

Tako bi u posljednjem primjeru imali

$$\iint_D 6xy^2 = 6\int_2^4 xdx \cdot \int_1^2 y^2 dy = 6 \ \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 \cdot \frac{y^3}{3}\bigg|_1^2 = 84$$

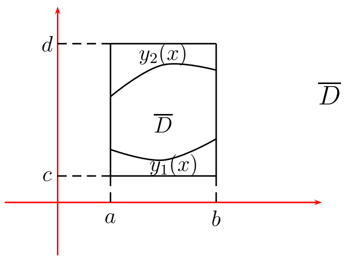
1.4.2 Dvojni integral po proizvoljnoj oblasti

U integraciji po proizvoljnoj oblasti mogu nastupiti dva slučaja prikazana na slici 1.4. Na slici lijevo imamo situaciju kada se x nalazi između konstantnih granica a i b, a y je između krivih $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Na desnoj slici imamo obrat, tj. $c \leq y \leq d$ i $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$.



Slika 1.4: Proizvoljna oblast integracije.

Razmotrimo situaciju prestavljenu lijevom slikom, a na potpuno analogan način se razmatra i druga mogućnost. Neka su funkcije y_1 i y_2 takve da za svako $x \in [a, b]$ vrijedi $y_1(x) \leq y_2(x)$. Posmatrajmo oblast zadatu sa



$$\overline{D}: \; a \leq x \leq b \quad , \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

Neka su c i d fiksirani realni brojevi takvi da je $c \leq y_1(x) \leq y_2(x) \leq d$. Tada je sistemom

$$\overline{D^*}: \quad a \leq x \leq b \quad , \quad c \leq y \leq d \; ,$$

zadana pravougaona oblast , za koju uočavamo da je sastavljena od tri odvojene oblasti:

$$\begin{array}{ll} \overline{D_1}: & a \leq x \leq b \; , \; c \leq y \leq y_1(x) \\ \overline{D}: & a \leq x \leq b \; , \; y_1(x) \leq y \leq y_(x) \\ \overline{D_2}: & a \leq x \leq b \; , \; y_2(x) \leq y \leq d \; . \end{array}$$

Pomoću funkcije $f(x, y)$ definisane u oblast $\overline{D}$, konstruišimo novu funkciju.

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ; \quad (x, y) \in \overline{D} \\ 0 & ; \quad (x, y) \in \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \end{cases}$$

Funkcija f^* je integrabilna u oblasti pravougaonika jer je konstantna na $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$, a poklapa se sa integrabilnom funkcijom f na $\overline{D}$.
Prema prethodnoj sekciji sada imamo

$$\iint_{\overline{D^*}} f^*(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x,y)dy \ . \tag{1.4.1}$$

Posmatrajmo sada lijevu stranu u jednakosti (1.4.1). Na osnovu aditivnosti višestrukog integrala po oblasti integracije, imamo

$$\iint_{\overline{D^*}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D_1}} f^*(x,y)dxdy + \iint_{\overline{D}} f^*(x,y)dxdy + \iint_{\overline{D_2}} f^*(x,y)dxdy \ . \tag{1.4.2}$$

Na osnovu definicije funkcije f^* je

$$\iint_{\overline{D_1}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D_2}} f^*(x,y)dxdy = 0$$

i

$$\iint_{\overline{D}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \ .$$

Sada iz (1.4.2) imamo

$$\iint_{\overline{D^*}} f^*(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy \ . \tag{1.4.3}$$

Posmatrajmo sada unutrašnji integral na desnoj strani u (1.4.1). Zbog aditivnosti određenog integrala važi

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy \tag{1.4.4}$$

Opet na osnovu definicije funkcije f^* vrijedi

$$\int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy = \int_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy = 0 \ ,$$

pa jednakost (1.4.4) postaje

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \ . \tag{1.4.5}$$

Koristeći (1.4.3) i (1.4.5), jednakost (1.4.1) postaje

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \ . \tag{1.4.6}$$

Ako je oblast integracije data sistemom (desna slika)

$$\overline{D}: \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad , \quad c \leq y \leq d \ ,$$

slično gornjem rezonovanju bi dobili

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \ . \tag{1.4.7}$$

Formule (1.4.6) i (1.4.7) nam daju način izračunavanja dvojnog integrala za proizvoljnu oblast integracije. Dakle, dvojni integral rješavamo pomoću dvostrukog integrala u kome su granice unutrašnje integracije eventualno ovisne o jednoj promjenljivoj dok su granice spoljašnje integracije obavezno konstantne (po promjenljivima integracije).

Što se tiče pravila za izračunavanje dvojnih integrala, ona su:

1. Aditivnost po podintegralnoj funkciji:

$$\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy \ .$$

2. Izvlačenje konstante:

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy \ .$$

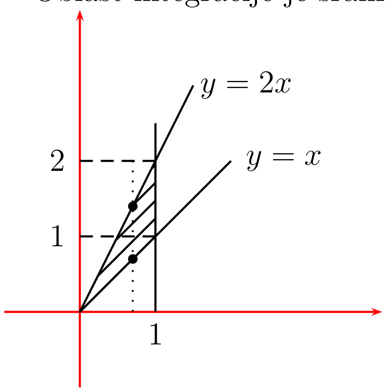
3. Aditivnost po granici integracije:

$$\iint_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \ .$$

Primjer 1.4. Izvršiti prelaz iz dvojnog u dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ nad oblašću $\overline{D}$, ako je

$$\overline{D}: \quad y = x \ , \ y = 2x \ , \ x = 1 \ .$$

Oblast integracije je šrafirani dio na slici.

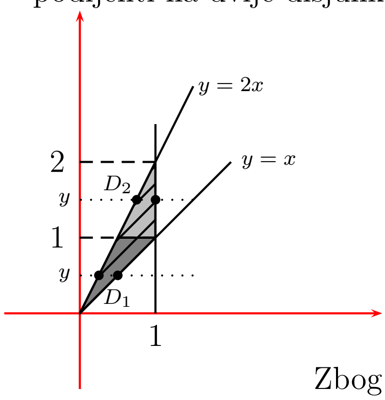


Odlučimo se za redoslijed integracije prvo (unutrašnja) po y, a zatim (spoljašnja) po x. To nam onda diktira da granice za x moraju biti konstante, dok za y one mogu ovisiti o varijabli x. Projektujući oblast $\overline{D}$ na x-osu, dobijamo da su granice za x od 0 do 1. Birajući proizvoljan $x \in [0,1]$ i posmatrajući vertikalu u toj tački, konstatujemo da se najmanja vrijednost y postiže na liniji $y = x$, a najveća na liniji $y = 2x$.

To nam upravo predstavlja granice integracije.

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx \ .$$

Ako bi zamjenili redoslijed integracije treba primjetiti da datu oblast moramo podijeliti na dvije disjunktne oblasti.



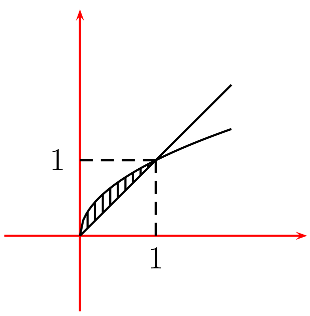
Naime, ako se odlučimo za redoslijed integracije prvo (unutrašnja) po x, a zatim (spoljašnja) po y, to nam onda diktira da granice za y moraju biti konstante, dok za x one mogu ovisiti o varijabli y. Međutim, birajući da je $0 \leq y \leq 1$, vidimo da se tada vrijednost x-a mijenja od prave $x = \frac{y}{2}$ do prave $x = y$, a ako biramo $1 \leq y \leq 2$, onda se x mijenja od prave $x = \frac{y}{2}$ do prave $x = 1$.

Zbog toga oblast integracije $\overline{D}$ razbijamo na dvije oblasti, $D_1 : \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ \frac{y}{2} \leq x \leq y$ (tamnosiva) i $D_2 : \ 1 \leq y \leq 2 \ , \ \frac{y}{2} \leq x \leq 1$ (svijetlosiva). Koristeći aditivnost dvojnog integrala po granici integracije sada imamo,

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy &= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)dx \ . \end{aligned}$$

♢

Primjer 1.5. Izvršiti prelaz iz dvojnog u dvostruki integral funkcije $f(x,y)$ nad oblašću $\overline{D} : \quad y = x \ , \ y = \sqrt{x}$.



Oblast integracije je šrafirani dio na slici. Sada imamo

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy \right) dx \ . \end{aligned}$$

Primjetimo da u ovom slučaju imamo jednostavnu zamjenu redoslijeda integracije, tj.

$$\iint_{\overline{D}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x,y)dx \ ,$$

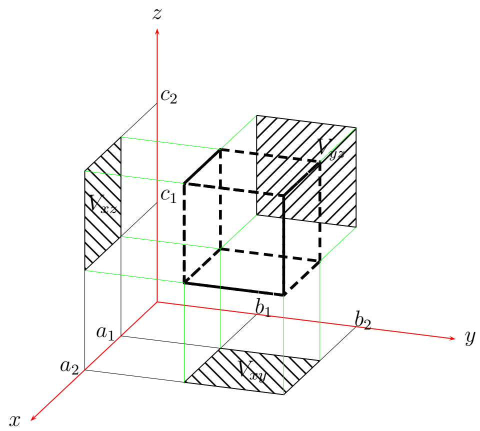
što u prvom primjeru nije bio slučaj. ♢

1.5 Trojni integral

1.5.1 Trojni integral po oblasti pravouglog paralelepipeda

Neka je sada funkcija $f(x, y, z)$ definisana i integrabilna u zatvorenoj oblasti

$$\overline{V}: \quad a_1 \leq x \leq a_2 \ , \ b_1 \leq y \leq b_2 \ , \ c_1 \leq z \leq c_2 \ .$$



Slika 1.5: Trojni integral po pravouglој oblasti

Na slici su sa V_{xy}, V_{xz} i V_{yz} označene redom projekcije paralelepipeda $\overline{V}$ na xOy, xOz i yOz ravan.

Definicija 1.5.1

Neka je funkcija

$$\Phi_1(x) = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)dz$$

integrabilna na segmentu $[a_1, a_2]$. Tada integral

$$\int_{a_1}^{a_2} \Phi_1(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)dz$$

nazivamo trostrukim integralom funkcije $f(x, y, z)$ u zatvorenom paralelepipedu pri čemu se integracija vrši prvo po promjenljivoj z zatim po promjenljivoj y i na kraju po promjenljivoj x.

Definicija 1.5.2

Neka je funkcija
$$\Phi_2(z) = \iint_{V_{xy}} f(x,y,z)dxdy$$
integrabilna na segmentu $[c_1, c_2]$. Integral
$$\int_{c_1}^{c_2} \Phi_2(z)dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{V_{xy}} f(x,y,z)dxdy$$
nazivamo trostrukim integralom funkcije $f(x,y,z)$ po oblasti zatvorenog paralelepipeda, pri sukcesivnoj integraciji prvo unutrašnja integracija po projekciji paralelepipeda u xOy ravan (dvojni integral), a zatim spoljna integracija po promjenljivoj z.

Definicija 1.5.3

Neka je funkcija
$$\Phi_3(x,y) = \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$
integrabilna u oblasti V_{xy}. Integral
$$\iint_{V_{xy}} \Phi_3(x,y)dxdy = \iint_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$
nazivamo trostruki integral funkcije $f(x,y,z)$ po oblasti paralelepipeda, pri sukcesivnoj integraciji prvo po promjenljivoj z (unutrašnja integracija), a zatim po oblasti V_{xy} (spoljašnja integracija).

Ne izazivajući zabunu, očigledno da sve tri gornje definicije definišu isti pojam trostrukog integrala. Razlika je u tome što se na desnim stranama jednakosti pojavljuju različiti redoslijedi integracije. Potpuno ravnopravno smo mogli posmatrati i bilo koju drugu varijantu redoslijeda integracija na desnim stranama jednakosti tih definicija, naprimjer prvo po x, zatim po y i na kraju po z. To nam je omogućeno time što je oblast integracije oblast pravouglog paralelepipeda koja je "idealna" u smislu jednostavnosti integracije. Ovo potvrđujemo narednim tvrđenjem, a koji nam ujedno daje i tehniku rješavanja trojnog integrala po oblasti pravouglog paralelepipeda.

Teorem 1.5.1

Neka je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna u zatvorenom paralelepipedu $\overline{V}$ i neka za proizvoljno $(x,y) \in V_{xy}$ postoji integral $\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$, tada postoji i integral

$$\iint_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz$$

i vrijedi jednakost

$$\begin{aligned}\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz &= \iint_{V_{xy}} dxdy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \\ &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz \ .\end{aligned}$$

Primjer 1.6. Izračunati $\iiint_V xyzdxdydz$, gdje je oblast V zadata sa:

$$0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 1 \ .$$

Dakle, u pitanju je integracija po paralelepipedu, zato vrijedi

$$\begin{aligned}\iiint_V xyzdxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 xyzdz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(xy\frac{z^2}{2} \right)_0^1 \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{2} dy \\ &= \int_0^1 dx \left(\frac{x}{2}\frac{y^2}{2} \right)_0^1 \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{8} \ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

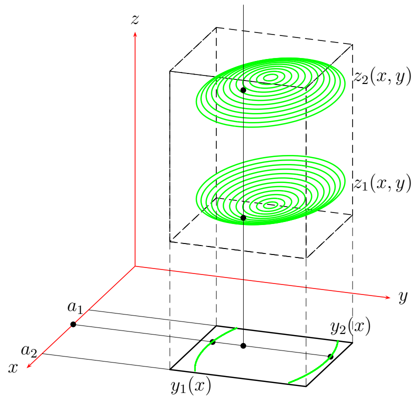
Primjetimo i ovdje da ako je podintegralna funkcija funkcija razdvojenih promjenljivih tojest, $f(x,y,z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$, da se izračunavanje trojnog integrala po pravougaonoj oblasti $\overline{V}$ svodi na

$$\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} f_1(x)dx \cdot \int_{b_1}^{b_2} f_2(y)dy \cdot \int_{c_1}^{c_2} f_3(z)dz \ .$$

1.5.2 Trojni integral po proizvoljnoj oblasti

Neka je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru zadata oblast

$$\overline{V}: \quad a_1 \leq x \leq a_2 \ , \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \ , \ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \ .$$



Slika 1.6: Trojni integral po proizvoljnoj oblasti

Neka je funkcija $f(x,y,z)$ integrabilna u oblasti $\overline{V}$. Slično rezonovanju kod dvojnog integrala i ovdje bi smo oko oblasti $\overline{V}$ opisali paralelepiped, pa bi smo dijeleći taj paralelepiped na disjunktne oblasti došli do jednakosti

$$\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \ ,$$

koja nam daje jedan od načina rješavanja trojnog integrala.

Pravila u radu sa trojnim integralima su:

1. Aditivnost po podintegralnoj funkciji:

$$\iiint_V (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint_V g(x,y,z)dxdyz \ .$$

2. Izvlačenje konstante:

$$\iiint_V cf(x,y,z)dxdyz = c\iint_V f(x,y,z)dxdyz \ .$$

3. Aditivnost po granici integracije:

$$\iiint_{V=V_1\cup V_2} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz \ .$$

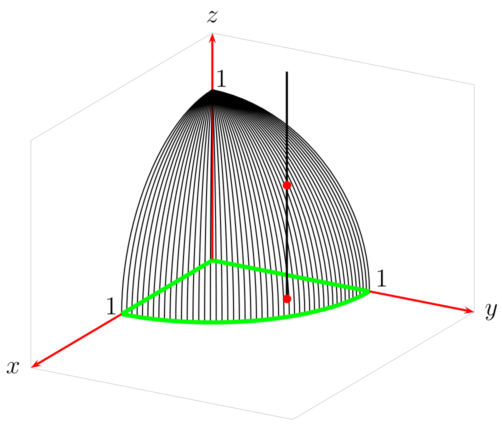
Primjer 1.7. Izračunati $\iiint_V xyzdxdydz$, gdje je oblast V zadata sa

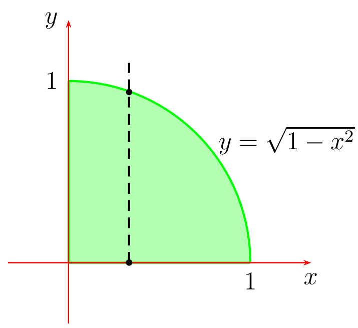
$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ .$$

Sada imamo integraciju po dijelu lopte centra $(0, 0, 0)$, poluprečnika 1, koji se nalazi u prvom oktantu. Neka prva integracija bude po z, druga po y i treća po x. To znači da su granice za x konstantne, pa zato projektujmo tijelo V u xOy ravan (slika 1.7, desno) iz koje vidimo granice

$$0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \ .$$

Granice za z određujemo na sličan način kao za y: u oblasti projekcije izaberemo proizvoljnu tačku i iz nje vučemo vertikalu. Na toj vertikali određujemo najmanju i najveću vrijednost za z, odnosno na kojim površima se nalaze te vrijednosti. Na slici 1.7 lijevo, vidimo da je najmanja vrijednost za z u ravni $z = 0$, a najveća se uvijek nalazi na površi $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.





Slika 1.7: Dio centralne lopte poluprečnika 1 u prvom oktantu (lijevo) i njegova projekcija u xOy ravan (desno)

Ovo nam sada daje prelaz iz trojnog u trostruki integral

$$\iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz \ .$$

Ostaje još "računski" dio zadatka.

$$\begin{aligned}
\iiint_V xyzdxdydz &= \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz \\
&= \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \left.\left(\frac{y^2}{2}(1-x^2)-\frac{y^4}{4}\right)\right|_0^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2dx = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

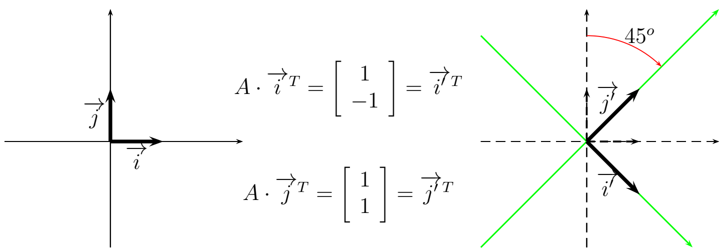
$\diamondsuit$

1.6 Jacobijeva determinanta

U linearnoj algebri smo vidjeli da matrice nisu ništa drugo do preslikavanja vektorskog prostora. Pri tome smo se upoznali sa matricama prelaza i vidjeli da je dovoljno znati u šta se preslikavaju vektori baze. Tako na primjer matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

predstavlja rotaciju ravni, odnosno $\mathbb{R}^2$ prostora (slika 1.8).



Slika 1.8: Rotacija realne ravni.

Sada proizvoljnu tačku (x, y) sistema $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ preslikavamo u tačku (x', y') sitema $\{\vec{i'}, \vec{j'}\}$, sistemom jednačina

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

koji je određen matricom A (matrica sistema).

Ako sada posmatramo proizvoljan algebarski sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

možemo ga zapisati u matričnom obliku

$$Y = AX$$

pa on dakle predstavlja neko preslikavanje $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji inverzno preslikavanje datog preslikavanja, takvo preslikavanje nazivamo *regularnim.* U gornjem slučaju to će biti ako postoji A^{-1}, tj. ako je matrica A regularna matrica.

Posmatrajmo sada opšti slučaj preslikavanja

$$\begin{array}{ccc} y_1 & = & f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 & = & f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ..... & ... & .... \\ y_n & = & f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array} \tag{1.6.1}$$

Na osnovu ovog sistema možemo formirati funkcionalnu determinantu

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ ...... & \cdots & ...... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Definicija 1.6.1

Za preslikavanje (1.6.1) kažemo da je regularno u oblasti D ako vrijedi

1. funkcije $f_1, ..., f_n$ imaju neprekidne parcijalne izvode po svakoj promjenljivoj,

2. $J \neq 0$.

Determinantu J nazivamo *Jacobijeva determinanta* ili *jakobijan* preslikavanja (1.6.1).

U literaturi se često za jakobijan preslikavanja (1.6.1) koristi oznaka

$$J = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \ .$$

Ako je dato preslikavanje (1.6.1) i preslikavanje

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & g_1(t_1, t_2, ..., t_n) \\ x_2 & = & g_2(t_1, t_2, ..., t_n) \\ ..... & ... & .... \\ x_n & = & g_n(t_1, t_2, ..., t_n) \ , \end{array} \tag{1.6.2}$$

nije teško pokazati da za jakobijane ovih preslikavanja važi

$$\frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \frac{D(g_1, g_2, ..., g_n)}{D(t_1, t_2, ..., t_n)} = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(t_1, t_2, ..., t_n)} \ .$$

Iz ovoga onda proizilazi važna osobina jakobijana:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \frac{D(x_1, x_2, ..., x_n)}{D(y_1, y_2, ..., y_n)} = 1 \ , \tag{1.6.3}$$

naravno pod pretpostavkom postojanja inverznih preslikavanja y_i^{-1} $(i = 1, 2, ..., n)$.

Primjer 1.8. Zadato je preslikavanje $\rho\varphi$ ravni u xy ravan sa

$$x = x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$
$$y = y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$

Odrediti jakobijan preslikavanja.

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \ .$$

Računanjem iz zadatog sistema dobijamo

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 = x^2 + y^2 \ ,$$

odakle je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Koristeći se jednakošću (1.6.3) lagano dobijamo da je

$$\frac{D(\rho, \varphi)}{D(x, y)} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ .$$

$\diamondsuit$

1.7 Smjena promjenljivih u dvojnom integralu

Izračunavanje integrala, kao što smo to vidjeli kod običnog jednostrukog Riemanovog integrala, često je olakšano uvođenjem povoljne smjene. Ista je situacija i kod n-integrala, tj. pogodnom smjenom uprošćava se računanje n-integrala. Neka je zadat sistem

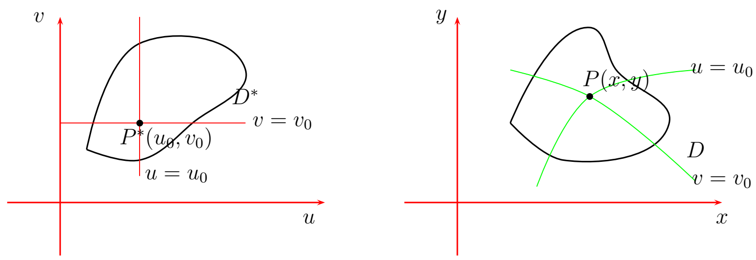
$$x = x(u, v) \ , \ y = y(u, v) \tag{1.7.1}$$

Dati sistem predstavlja transformaciju uv-ravni u xy-ravan, tj. svakoj tački $P^*(u, v)$ iz uv-ravni odgovara tačka $P(x, y)$ iz xy-ravni. Ako tački $P^* \in D^*$ odgovara jedinstvena tačka $P \in D$ i obratno, tada je gornjom transformacijom uspostavljeno bijektivno preslikavanje oblasti D^* na D. Gornjom transformacijom se prava $u = u_0$ oblasti D^*, koja se nalazi u uv-ravni, preslikava na krivu u-liniju u xy-ravni

$$x = x(u_0, v) \ , \ y = y(u_0, v) \ .$$

Analogno, prava $v = v_0$ oblasti D^* iz uv-ravni se preslikava u krivu v-liniju u xy-ravni

$$x = x(u, v_0) \ , \ y = y(u, v_0) \ .$$



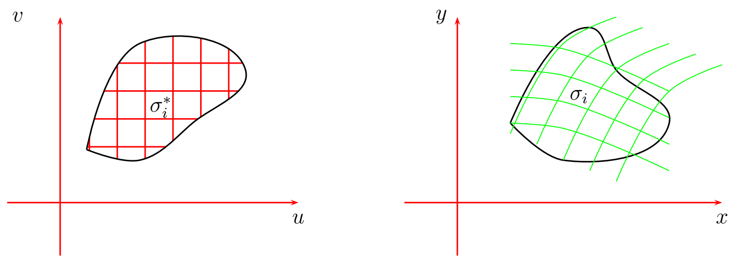
Slika 1.9: Transformacija nekih linija prilikom smjene.

Ukoliko je oblast D^* podjeljena mrežom pravih $u = u_0$, $v = v_0$, na pravolinijske ćelije-pravougaonike σ_i^*, transformacijom (1.7.1) se ta podjela preslikava u krivolinijske ćelije σ_i u xy-ravni.

Pri tome se pokazuje da vrijedi

$$\lim_{diam\sigma_i \to 0} \frac{mes(\sigma_i)}{mes(\sigma_i^*)} = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = |J(x_i, y_i)| \ ,$$

u nekoj tački $(x_i, y_i) \in \sigma_i$. Ovo nam daje princip promjene oblasti integracije prilikom uvođenja smjena.



Slika 1.10: Transformacija oblasti sa podjelom.

Teorem 1.7.1

Ako se sistemom funkcija

$$x = x(u, v) \ , \ y = y(u, v)$$

realizuje bijektivno preslikavanje oblasti D^* u oblast D i ako je funkcija $f(x, y)$ integrabilna u oblasti D, tada je

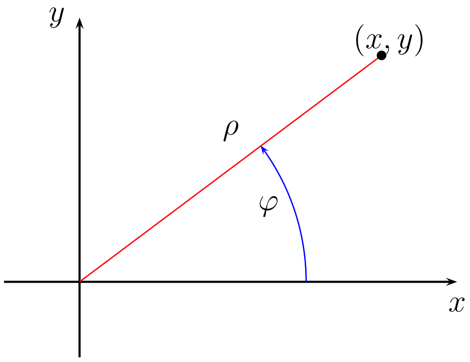
$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv \ .$$

Kao specijalnu smjenu kod dvojnih integrala navodimo ovdje polarne koordinate, tj. transformaciju

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi \ , \tag{1.7.2}$$

pri čemu su prirodne granice novih varijabli date sa

$$0 \leq \rho < +\infty \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ .$$

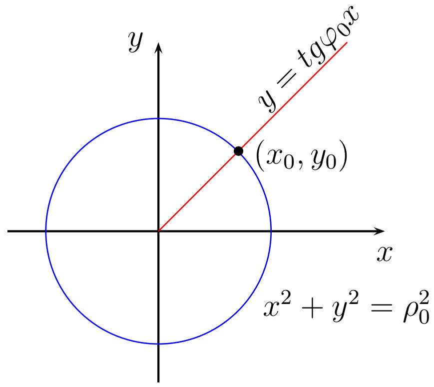


Geometrijski, ρ predstavlja udaljenost tačke od koordinatnog početka, a φ je ugao između pozitivnog dijela x-ose i duži ρ, te odatle proizilaze prirodne granice za ove veličine.

Slika 1.11: Polarne koordinate.

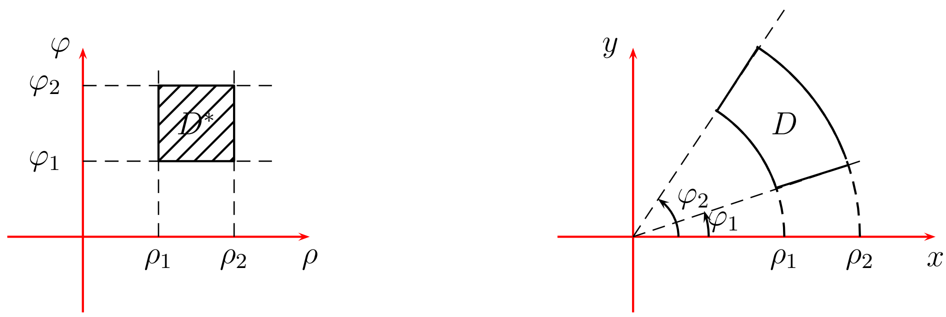
Naravno, sada se postavlja pitanje da li postoje različite tačke u xy-ravni kojima bi odgovarale iste veličine ρ i φ?

Ako posmatramo neko fiksno ρ_0, koristeći smjene 1.7.2, zaključujemo da sve tačke na kružnici $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ imaju istu udaljenost od koordinatnog početka. Analogno, ako fiksiramo neki ugao φ_0, ponovo koristeći smjene (1.7.2) dobijamo da sve tačke na polupravoj $y = tg\varphi_0 x$ imaju isti ugao prema pozitivnom dijelu x-ose.



Slika 1.12: Koordinatne linije polarnih koordinata.

Iz ovoga zaključujemo da polarne koordinate (ρ_0, φ_0) određuju tačno jednu tačku u xy-ravni, što je i odgovor na postavljeno pitanje. Osim toga, iz gornjeg razmatranja se vidi da se linije $\varphi = \varphi_0$ iz polarnog sistema preslikavaju u poluprave u xy-sistemu, a da se linije $\rho = \rho_0$ preslikavaju u kružnice.



Slika 1.13: Preslikavanje koordinatnih linija polarnim koordinatama.

Dakle, slika preslikavanjem (1.7.2) oblasti D^* iz polarnog sistema, je oblast D u pravouglom koordinatnom sistemu. Kako je jakobijan ovog preslikavanja dat sa $J = \rho$, to na osnovu Teoreme 1.7.1 imamo

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi))\rho d\rho d\varphi \ .$$

Primjer 1.9. Izračunati: $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, gdje je oblast integracije $D:\ x^2 + y^2 = 1$.

Uvedimo polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Ubacujući ove smjene u jednačinu kružnice, koja predstavlja oblast integracije, dobijamo da je $\rho = 1$. Kako nemamo nikakav uslov na ugao φ, to je nova oblast integracije data sa

$$D^* \ : \ 0 \le \rho \le 1 \ \ , \ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

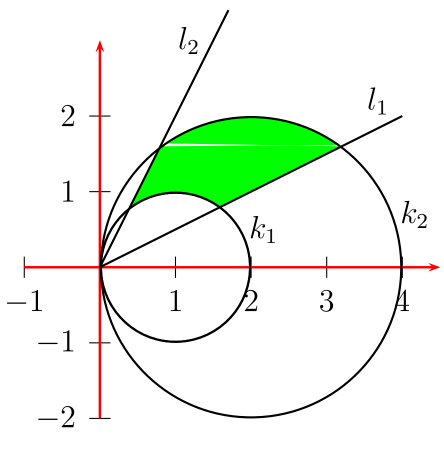
Sada imamo

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \iint_{D^*} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= \pi(1-e^{-1}) \ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.10. Izračunati: $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$, gdje je oblast zadata sa

$$D : (k_1)\ x^2+y^2 = 2x \ , \ (k_2)\ x^2+y^2 = 4x \ , \ (l_1)\ y = \frac{x}{2} \ , \ (l_2)\ y = 2x \ .$$



Uvedimo polarne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi \ , \ y = \rho\sin\varphi \ , \ J = \rho \ .$$

Ubacujući smjene u jednačine kružnice k_1 i k_2, dobijamo redom

$$\rho = 2\cos\varphi \ , \ \rho = 4\cos\varphi \ . \qquad (1.7.3)$$

Jednačine linija l_1 i l_2 daju nam veze

$$tg\varphi = \frac{1}{2} \ , \ tg\varphi = 2 \ . \qquad (1.7.4)$$

Veze (1.7.3) i (1.7.4) nam daju upravo donju i gornju granicu novih varijabli, tj. novodobijena oblast je

$$D^* : \ \rho \ge 2\cos\varphi \ , \ \rho \le 4\cos\varphi \ , arctg\frac{1}{2} \le \varphi \le arctg2 \ .$$

Sada je prelaz u dvostruki integral dat sa

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy &= \iint_{D^*} \frac{1}{\rho^4}\rho d\rho d\varphi \\
&= \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4cos\varphi} \frac{1}{\rho^3}d\rho \\
&= -\frac{1}{2}\int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} \left(\frac{1}{16\cos^2\varphi} - \frac{1}{4\cos^2\varphi}\right)d\varphi \\
&= \frac{3}{32}\int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} \frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = \frac{3}{32}tg\varphi\Big|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg2} = \frac{9}{64}\ .
\end{aligned}$$

♢

Opštija smjena od gornje smjene su tzv. *uopštene polarne koordinate*, tj.

$$x = a\rho\cos\varphi\ \ ,\ \ y = b\rho\sin\varphi\ ,$$

gdje su a i b pozitivni realni brojevi. Ovom smjenom se elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u xy-ravni, prevodi u jediničnu kružnicu $\rho = 1$ u $\rho\varphi$-ravni. Jakobijan ovog preslikavanja je $J = ab\rho$.

Napomenimo još i to da ako želimo jednačinu opšte elipse

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1\ ,$$

prevesti u jediničnu kružnicu u $\rho\varphi$-ravni, to ćemo postići smjenama

$$x = a\rho\cos\varphi + p\ ,\ y = b\rho\sin\varphi + q\ ,$$

sa jakobijanom $J = ab\rho$.

1.8 Smjena promjenljivih u trojnom integralu

Neka je dat sistem

$$x = x(u,v,w)\ ,\ y = y(u,v,w)\ ,\ z = z(u,v,w)\ , \tag{1.8.1}$$

kojim je definisano bijektivno preslikavanje tačaka $P^*(u,v,w)$ uvw-prostora, u tačke $P(x,y,z)$ iz xyz-prostora. Ako je J jakobijan preslikavanja (1.8.1) tada vrijedi

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudvdw\ ,$$

gdje je V^* oblast u uvw-prostoru nastala preslikavanjem (1.8.1) oblasti V u xyz-prostoru.

Kako smo se već ranije upoznali sa cilindričnim i sfernim koordinatnim sistemom, ovdje ćemo specijalno pokazati ove dvije vrste smjena u trojnom integralu.

1.8.1 Cilindrične koordinate

Ako pravougli Descartesov koordinatni sistem zamjenimo cilindričnim koordinatnim sistemom, što ostvarujemo sistemom

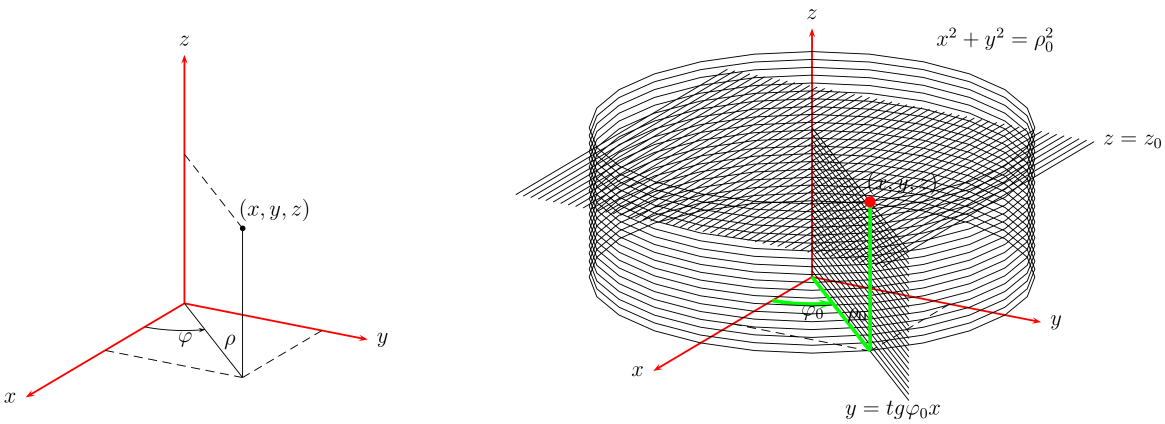
$$x = \rho\cos\varphi\ ,\ \ y = \rho\sin\varphi\ ,\ \ z = z\ ,$$

jakobijan kojeg je $J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \rho$, tada imamo

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz\ .$$

Geometrijska interpretacija cilindričnih koordinata je ta da svakoj tački (x, y, z) iz xyz-prostora, pridružimo njen položaj na z-osi, udaljenost projekcije te tačke u xy-ravni od koordinatnog početka, ρ, i ugao između potega ρ i pozitivnog dijela x-ose, φ. Pri tome su prirodne granice novih varijabli

$$0 \le \rho < +\infty\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\ ;\ -\infty < z < +\infty\ .$$



Slika 1.14: Cilindrične koordinate. Koordinatne površi cilindričnih koordinata (desno).

Držeći po jednu od cilindričnih koordinata konstantnom, dobijamo takozvane koordinatne površi u xyz-prostoru. Ako je $\rho = \rho_0$, dobijamo koordinatnu površ $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ (cilindar). Ako je $\varphi = \varphi_0$, odgovarajuća površ je data sa $y = tg\varphi_0 x$, a to je poluravan u prostoru koja sadrži z-osu. Na kraju, ako z držimo fiksnim, tj. $z = z_0$, odgovarajuća površ je ravan $z = z_0$.

Primjer 1.11. Izračunati: $\iiint_V \frac{z}{(x^2+y^2)^2}dxdydz$, gdje je oblast V ograničena cilindrima $x^2 + y^2 = x$ i $x^2 + y^2 = 2x$, te zavnima $z = 0, z = 4$. Uvođenjem cilindričnih koordinata

$$x = \rho\cos\varphi\ ,\ \ y = \rho\sin\varphi\ ,\ \ z = z\ ,$$

oblast V se transformiše u oblast

$$V^* \ : \ \cos\varphi \leq \rho \leq 2\cos\varphi \ , \ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \leq z \leq 4 \ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{zx}{(x^2+y^2)^2} dxdydz &= \iiint_{V^*} \frac{z\rho\cos\varphi}{(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2} \rho d\varphi d\rho dz \\
&= \iiint_{V^*} z\cos\varphi d\varphi d\rho dz \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} d\rho \int_0^4 zdz \\
&= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} d\rho \\
&= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = 4\pi \ .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

1.8.2 Sferne koordinate

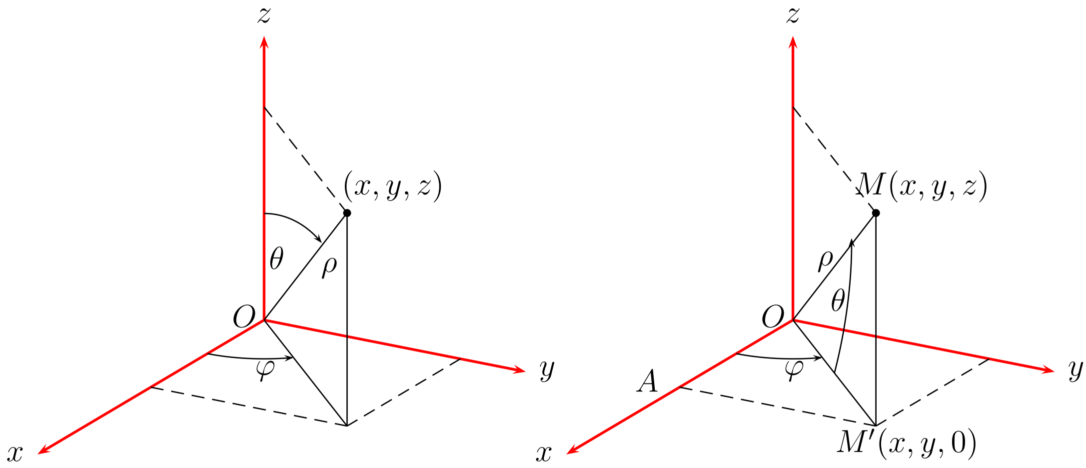
Sferni koordinatni sistem ima za ideju orijentaciju na sfernoj površini. Sferu dijelimo "paralelnim" kružnicama, među kojima je i ekvatorijalna, koje nazivamo paralelama, i "velikim" kružnicama koje sve prolaze kroz polove sfere, koje nazivamo meridijanima. U takvoj podjeli sfere, pokazuje se boljim opis položaja tačke u smislu koliko smo daleko (u stepenima) od nekog fiksnog meridijana i koliko smo daleko (u stepenima) od neke fiksne paralele, od uobičajenih koordinata, dužine, širine i visine. Naravno, ukoliko sferu "naduvavamo", treća bitna stvar o položaju je i udaljenost posmatrane tačke od koordinatnog početka. Postoje dva pristupa sfernim koordinatama, u zavisnosti od toga koju paralelu biramo za fiksnu.

Posmatrajmo gornju sliku desno. Uzimamo da je ρ udaljenost tačke M od koordinatnog početka, φ je udaljenost od meridijana, tj. ugao između potega OM', gdje je M' projekcija tačke M u Oxy ravni i pozitivnog dijela x-ose i θ je ugao između ρ i Oxy ravni, tj. udaljenost tačke M od ekvatorijalne ravni (izraženo uglom). Uočimo trougao $\triangle OM'M$. To je pravougli trougao, pa iz njega očitavamo

$$\cos\theta = \frac{OM'}{OM} \ , \ \sin\theta = \frac{MM'}{OM} \ ,$$

odnosno

$$OM' = \rho\cos\theta \ , \ MM' = z = \rho\sin\theta \ . \tag{1.8.2}$$



Slika 1.15: Dva pristupa sfernim koordinatama.

Iz pravouglog trougla $\triangle OAM'$ očitavamo

$$\cos\varphi = \frac{OA}{OM'} \ , \ \sin\varphi = \frac{AM'}{OM'} \ ,$$

tj.

$$OM' = \frac{x}{\cos\varphi} \ , \ OM' = \frac{y}{\sin\varphi} \ . \tag{1.8.3}$$

Kombinujući (1.8.2) i (1.8.3) dobijamo sferne koordinate za slučaj kada ugao θ mjerimo od ekvatorijalne ravni.

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta \ , \ y = \rho\sin\varphi\cos\theta \ , \ z = \rho\sin\theta \ .$$

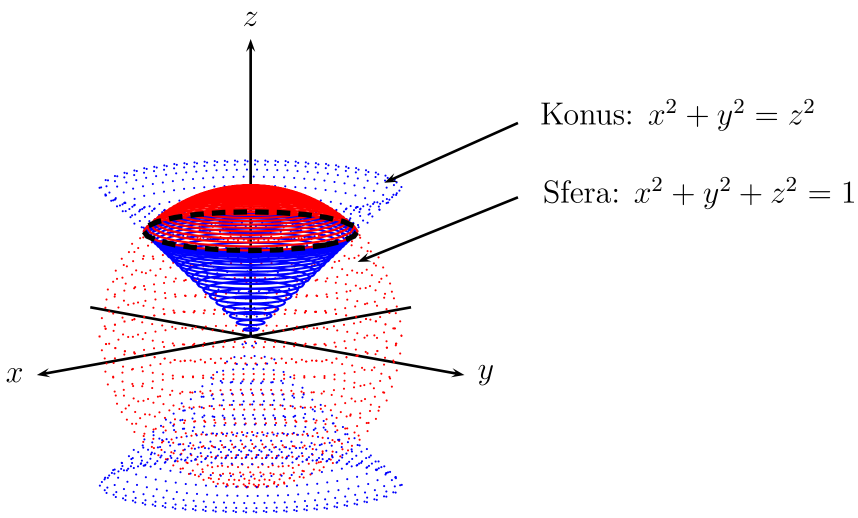
Prirodne granice su

$$0 \le \rho < +\infty \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ ,$$

jer su od "ekvatora" najudaljeniji polovi i to sjeverni 90°, a južni −90°. Jakobijan za ovakve smjene je $J = \rho^2\cos\theta$, tako sada smjena u trojnom integralu izgleda

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta \ .$$

Primjer 1.12. Riješiti $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, gdje je V oblast između lopte $x^2+y^2+z^2 = R^2$ i dijela konusa $z^2 = x^2+y^2$, $z \ge 0$.



Slika 1.16: Presjek sfere i konusa.

Uvedimo sferne koordinate

$$x = \rho \cos\varphi cos\theta \ , \ y = \rho \sin\varphi \cos\theta \ , \ z = \rho \sin\theta \ ,$$

za koje je jakobijan $J = \rho^2 \cos\theta$.
Stavljajući ove smjene u jednačinu konusa (vodeći računa da radimo sa unutrašnjim dijelom konusa, $z^2 \geq x^2+y^2$), dobijamo relaciju $\rho^2\sin^2\theta \geq \rho^2\cos^2\theta$, tj. uslov $\tan^2\theta \geq 1$. Ovaj uslov je ekvivalentan činjenici da je $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, a zbog uslova $z \geq 0$, tj. $\rho\sin\theta \geq 0$, takođe imamo da mora biti $\theta \in [0,\pi]$, što zajedno sa prirodnim granicama ovog ugla daje uslov

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ . \tag{1.8.4}$$

Stavljajući sferne koordinate u jednačinu sfere, dobijamo uslov $\rho^2 \leq R^2$, a zbog prirodnih granica za ρ ovo daje uslov

$$0 \leq \rho \leq R \ . \tag{1.8.5}$$

Kako drugih uslova više nemamo, granice ugla φ su prirodne, tj.

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \ . \tag{1.8.6}$$

Uslovi (1.8.4), (1.8.6) i (1.8.5) nam određuju oblast V^*, pa sada imamo

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz &= \iiint_{V^*} \frac{1}{\rho^2}\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= 2\pi R \sin\theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2R\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ .\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Uvodeći sferni koordinatni sistem, mjereći ugao θ od sjevernog pola (Slika 1.15, lijevo), rezonujući slično kao u prvom slučaju, sistem glasi

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta \ , \ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \ , \ z = \rho\cos\theta \ ,$$

gdje su prirodne granice novih koordinata

$$0 \leq \rho < +\infty \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ .$$

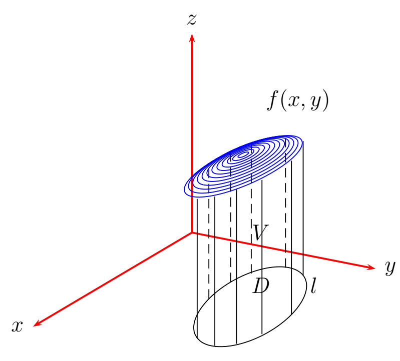
Sada je najudaljenija tačka od sjevernog pola, južni pol i to 180°. Jakobijan je $J = \rho^2 \sin\theta$, i smjena u trojnom integralu izgleda ovako

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta \ .$$

1.9 Primjena višestrukih integrala

Izračunavanje zapremine

Neka je $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $z \geq 0$, površ u prostoru xyz. Sa l' označimo granicu oblasti D. Cilindrična površ sa vodiljom l' i izvodnicama paralelnim osi Oz, siječe površ $f(x,y)$ po krivoj l. Sa V označimo zapreminu tijela ograničenog sa pomenutom cilindarskom površi (sa strane), oblašću D (odozdo) i površi $f(x,y)$ (odozgo).



Slika 1.17: Zapremina V ispod površi $f(x,y)$, nad oblašću D.

Tada je

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy \ . \tag{1.9.1}$$

Zaista, iz same definicije trojnog integrala jesno je da vrijedi

$$V = \iiint_V dxdydz \ ,$$

a ovo na osnovu Definicije 1.5.3, možemo zapisati kao

$$V = \iint_D dxdy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_D f(x,y)dxdy \ .$$

U slučaju da je $f(x,y) \leq 0$, jasno je da vrijedi

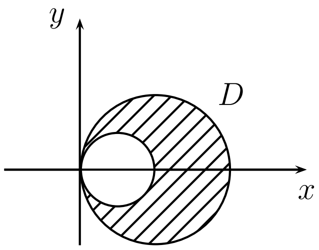
$$V = -\iint_D f(x,y)dxdy \ .$$

Primjer 1.13. Izračunati zapreminu tijela ograničenog paraboloidom $z = x^2 + y^2$, cilindarskim površima $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$ i sa ravni Oxy.

Ako sa D označimo oblast u Oxy ravni, omeđenu krugovima $x^2 + y^2 = x$ i $x^2 + y^2 = 2x$, tražena zapremina je

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy \ .$$

Uvedimo polarne koordinate: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Jednačine krugova u polarnim koordinatama su $\rho = \cos\varphi$ i $\rho = 2\cos\varphi$. Sada imamo

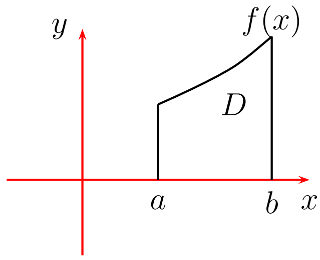


$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho \\ &= \frac{15}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi \\ &= \frac{45}{32}\pi \ . \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Izračunavanje površine ravnih likova

Posmatrajmo funkciju $y = f(x) \geq 0$ definisanu na razmaku $[a, b]$. Neka je D oblast ograničena sa gornje strane krivom $f(x)$ sa donje strane razmakom $[a, b]$ i sa strana pravama $x = a$ i $x = b$.



Slika 1.18: Površina oblasti D ispod krive $f(x)$, nad segmentom $[a, b]$.

Iz ranijeg izučavanja znamo da je površina oblasti D data sa

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Međutim, gornji izraz se može zapisati i sa

$$mes(D) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \iint_D dxdy \ ,$$

što daje formulu za izračunavanje površine ravnog lika D.

Primjer 1.14. Izračunati površinu kruga poluprečnika r.
U pitanju je proizvoljan krug, pa ćemo izabrati centralni krug poluprečnika r. Sada je tražena površina

$$P = \iint_D dxdy \quad , \quad D: \ x^2 + y^2 = r^2 \ .$$

Uvedemo li polarne koordinate, tj. smjene $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, imamo

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho d\rho = r^2\pi \ .$$

♢

Izračunavanje mase tijela

Posmatrajmo tijelo mase m u dijelu V prostora $\mathbb{R}^3$ u pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$. Količnik $\frac{m}{mes(V)}$, naziva se srednja gustina datog tijela. Ako sada uočimo proizvoljnu tačku $A(x,y,z) \in V$ i proizvoljnu kuglu $K(A,\varepsilon)$ oko te tačke koja leži u tijelu V, gustinu tijela u tački A, u oznaci $\rho(A)$ po definiciji računamo sa

$$\rho(A) = \rho(x,y,z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{m_K}{mes(K(A,\varepsilon))} \ ,$$

gdje je m_K masa lopte $K(A,\varepsilon)$. Ako je $\rho(A) = const$, za tijelo kažemo da je homogeno i u tom slučaju veza između gustine ρ i zapremine $mes(V)$, data je poznatom nam formulom $m = mes(V)\rho$.

Pretpostavimo zato da tijelo nije homogeno i da mu je gustina $\rho(x,y,z)$, $(x,y,z) \in V$, poznata. Izvršimo podjelu tijela V na podoblasti V_i, $i = 1,2,...,n$, kojih je dijametar proizvoljno malen i u kojima onda možemo smatrati da je gustina konstantna i jednaka $\rho(x_i,y_i,z_i)$ za neku tačku $(x_i,y_i,z_i) \in V_i$. Jasno je tada da vrijedi

$$m_i = \rho(x_i,y_i,z_i)mes(V_i) \ , \ i = 1,2,...,n \ ,$$

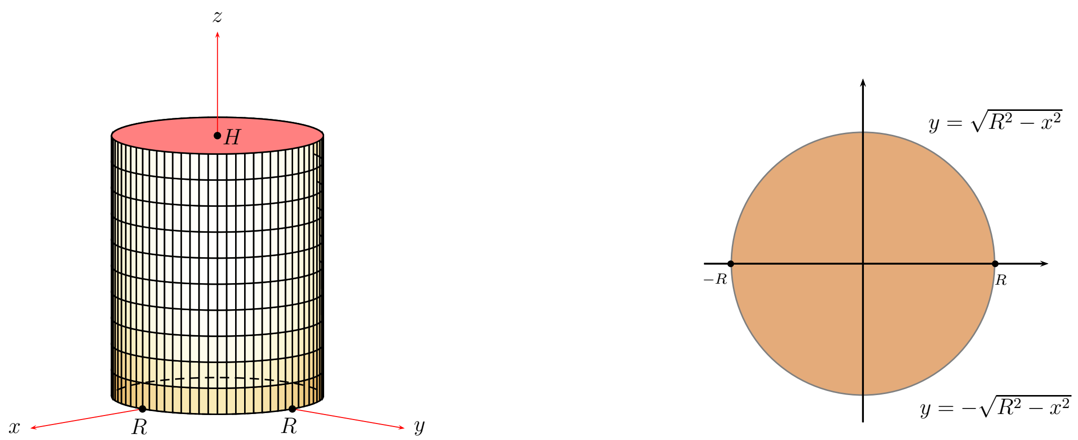
pa ako izvršimo sumiranje svih ovih masa, dobijamo približnu masu tijela. Prelaskom na limes

$$\lim_{\max mes(V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i) mes(V_i) \ ,$$

dobija se masa tijela, tj.

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz \ .$$

Primjer 1.15. Izračunati masu kružnog cilindra visine H i poluprečnika osnove R kod koga je gustina u svakoj tački direktno proporcionalna rastojanju te tačke od baze cilindra.



(a) Kruzni cilindar visine H i poluprecnika osnove R

(b) Projekcija cilindra u xOy ravan

Kako je gustina posmatranog tijela u tački proporcionalna rastojanju te tačke od baze u xOy ravni, to je $\rho(x, y, z) = kz$, gdje je k konstanta proporcionalnosti. Prema gornjem razmatranju sada imamo

$$\begin{aligned} m = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz &= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_0^H kzdz \right) dy \right) dx \\ &= k \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{2} H^2 dy \right) dx \\ &= kH^2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} kH^2 \pi R^2 \ . \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Moment inercije

Pod momentom inercije materijalne tačke u odnosu na pravu podrazumijeva se proizvod mase tačke i kvadrata rastojanja te tačke od prave. Moment inercije konačnog skupa materijalnih tačaka jednak je zbiru momenata pojedinačnih tačaka. U cilju definisanja i izračunavanja momenta inercije tijela, postupam na sljedeći način.
Pretpostavimo da tijelo V u prostoru $Oxyz$ ima gustinu $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in V$. Podijelimo V na manje oblsti V_i, $i = 1, 2, ..., n$, i izaberimo istaknute tačke (x_i, y_i, z_i) u svakoj od podoblasti V_i. Smatrat ćemo da je momenat inercije I_i dijela tijela V_i u odnosu na osu Oz ima vrijednost

$$I_i = (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) \ .$$

Sumirajući i prelazeći na limes, dobija se po definiciji moment inercije I datog tijela

$$I = \lim_{\max mes(V_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\rho(x_i, y_i, z_i)mes(V_i) = \iiint_v (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dxdydz \ .$$