1.1 Definicija i osnovni pojmovi

Nizove smo već vidjeli u dosadašnjem školovanju i to mnogo puta, čak i kada toga možda nismo bili svjesni.

Npr.

$$\begin{array}{ccccccc} 2, & 3, & 8, & 15, & -9, & -12, & \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 & , a_6, & \end{array}$$

Ukratko i jednostavno, niz je *uređena lista* objekata ili događaja.

Kao i skup, niz ima članove, ali za razliku od skupa, redoslijed je bitan i identični elementi se mogu pojavljivati više puta na različitim pozicijama unutar niza!

Definicija i osnovni pojmovi

Definicija 1.1. Svako preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva, nazivamo realnim nizom.

Broj koji se ovim preslikavanjem dodjeljuje prirodnom broju n označavamo sa $a(n)$, ili češće sa a_n (x_n, f_n) i nazivamo ga n-ti član niza.

Pri tome broj n u oznaci a_n nazivamo indeksom člana niza. Ako je specificirana zavisnost a_n od n, onda se a_n naziva opštim članom niza.

Za niz čiji su članovi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ koristit ćemo kraću oznaku $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ili kratkoće radi samo (a_n).

Na isti način možemo definisati nizove kompleksnih brojeva, nizove funkcija ili uopšteno nizove elemenata proizvoljnog skupa.

Mi ćemo se ograničiti na posmatranje samo realnih numeričkih nizova.

Primjer. Niz

$$1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...$$

je niz prirodnih brojeva. Niz

$$1, 3, 5, ..., 2n + 1, ...$$

je niz neparnih prirodnih brojeva, a

$$1, 4, 9, 16, 25, ...$$

je niz kvadrata prirodnih brojeva.

Niz je potpuno odredjen svojim opštim članom. Na primjer, ako je opšti član niza dat sa $x_n = \frac{n}{n+1}$, niz je u potpunosti odredjen i njegovi članovi su $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$, ili ako želimo odrediti stoti član ovog niza, $x_{100} = \frac{100}{101}$.

Za odredjivanje niza nije neophodno da postoji formula kojom se eksplicitno odredjuje opšti član x_n u zavisnosti od n. Npr., ako je x_n n-ti po redu prost broj, niz (x_n) je korektno definisan, iako ne znamo formulu za odredjivanje n-tog člana tog niza.

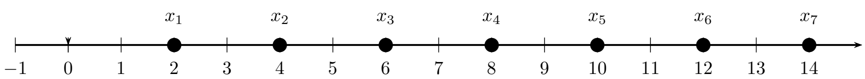
Isto tako možemo govoriti da je niz (a_n) zadat tako da je a_n n-ta cifra u decimalnom razvoju broja $\sqrt{2}$, mada formulu za n-tu cifru tog razvoja ne znamo eksplicitno. Znati konačno mnogo prvih članova niza nije dovoljno za jednoznačno odredjivanje niza. Npr., ako je dato prvih pet članova niza

$$0, 7, 26, 63, 124,$$

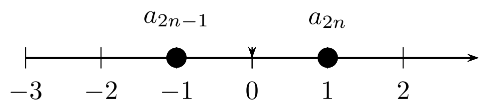
pravilo po kome su konstruisani ovi članovi može ali i ne mora da važi za šesti, sedmi i dalje članove ovog niza.

Predstavljanje nizova

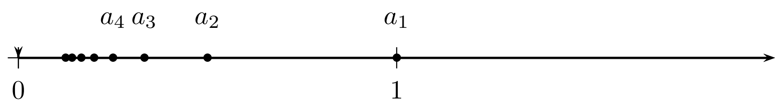
Predstavljati nizove možemo na dva načina. Iz samog opisa niza kao liste brojeva dobijamo prvi način, predstavljajući članove niza na realnoj pravoj. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, naznačavajući tačkama članove niza, bio predstavljen



Predstavljati beskonačne nizove na ovaj način bio bi problem jer bi se često gubila predstava o nizu. Naprimjer za niz $(-1, 1, -1, 1, ...)$ slika bi predstavljala samo dvije tačke



a oznakama a_{2n} i a_{2n-1} bi sugerisali parne i neparne pozicije članova našeg niza. Još teže bi bilo predstaviti niz $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.



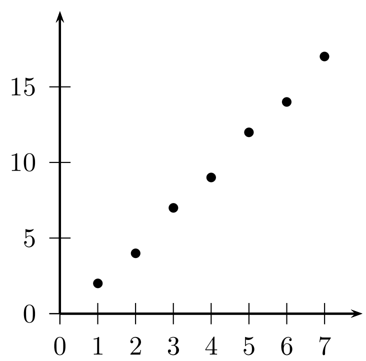
Označili bi prvih nekoliko članova niza, a dalje članove bi smo samo naznačili tačkama. Bolja, preglednija varijanta predstavljanja niza proizilazi iz činjenice da niz možemo shvatiti i kao preslikavanje. Pod preslikavanjem shvatamo činjenicu da članove niza numerišemo po njihovim pozicijama. Tako niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ možemo predstaviti tabelom

n	1	2	3	...	k	...
x_n	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...

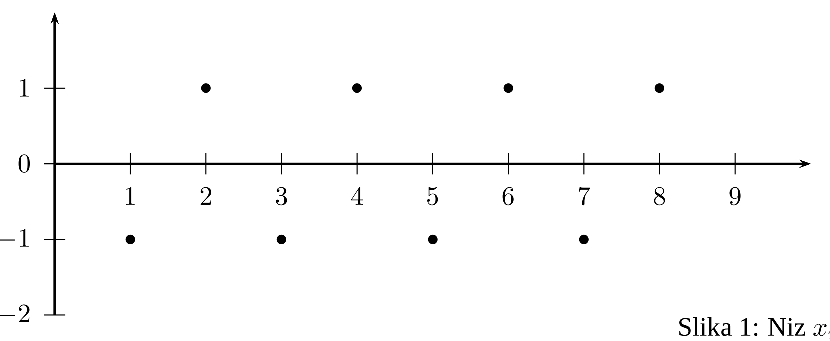
Ovo znači da niz možemo posmatrati kao preslikavanje $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Domen ovog preslikavanja je skup prirodnih brojeva i kad god je domen preslikavanja skup $\mathbb{N}$, takvo preslikavanje nazivamo niz.

Sve ovo znači da sada možemo koristiti sve osobine funkcija, ali takodje i pojmove uvedene sa njima. Ovo prije svega znači da niz možemo predstaviti u obliku grafa. Tako bi niz $(2, 4, 6, ..., 14)$, predstavljen grafom izgledao kao na sljedećoj slici



Ovo je sada puno pogodniji način za predstavljanje beskonačnih nizova. Sada grafički možemo predstaviti malopređašnje "problematične" nizove:



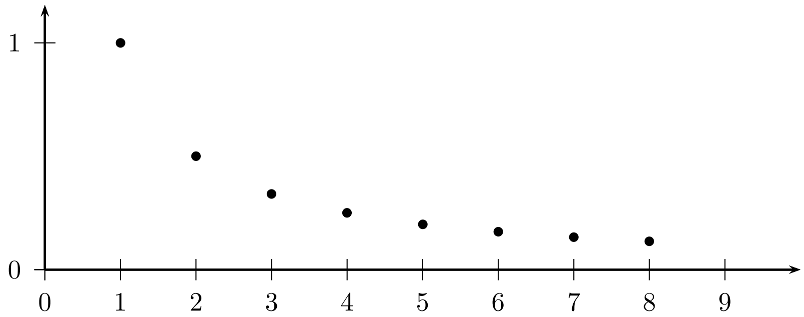
Slika 1: Niz $x_n = (-1)^n$.

1.1.1 Aritmetički niz

Aritmetički niz

Aritmetički niz je posebna podklasa nizova koji izgledaju kao

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$



Slika 2: Niz $x_n = \frac{1}{n}$.

$$1, 5, 9, 13, \ldots$$

$$8, 5, 2, -1, -4, \ldots$$

tj. nizovi kod kojih je razlika između susjednih članova konstantna. Formalno,

Definicija 1.2. Niz $(a_n)_1^\infty$ gdje za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = d$, $(d \in \mathbb{R})$, naziva se *aritmetički niz.*

Iz posljednje dvostruke jednakosti slijedi da je $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$, dakle, svaki član niza je aritmetička sredina svoga prethodnika i svoga sljedbenika u nizu.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \end{aligned}$$

Stoga dobivamo da je opći član aritmetičkog niza dat sa

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Sada nas interesuje zbir prvih n članova aritmetičkog niza, tj.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Posmatrajmo za primjer aritmetički niz

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Zbir njegovih prvih 100 članova je

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Grupišimo prvi sa zadnjim, drugi sa predzadnjim itd, tj.

$$1 + 100 = 101,\ 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, \ldots$$

Na ovaj način dobijemo koliko parova? Naravno, dobijemo 50 parova brojeva čiji je zbir 101! Dakle odgovor je

$$S_{100} = 50 \cdot 101 = 5050.$$

u općem slučaju, za $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d) = 2a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + (a_1 + (n-2) \cdot d) = 2a_1 + (n-1) \cdot d \ldots$$

A ovih parova ima koliko? Pa $n/2$! Stoga dobijemo da je suma prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d),$$

ili drugačije

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Dakle zbir prvih n brojeva je

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Primjer. Ako na početku godine u jastučnicu stavimo $1000KM$ i svaki slijedeći mjesec stavimo po 50KM više nego u prethodnom mjesecu, izračunati iznos ušteđevine nakon 7 godina.

Dakle, ulažemo

$$1000, 1050, 1100, 1150, \ldots.$$

Broj uloženih iznosa je $7 \cdot 12 = 84$, dakle interesuje nas ukupni zbir 84 ovakvih ulaganja, tj. S_{84}. Koristeći formulu, imamo

$$S_{84} = \frac{84}{2} \cdot (2 \cdot 1000 + (84-1) \cdot 50) = 42 \cdot (2000 + 4150) = 258300.$$

1.1.2 Geometrijski niz

Geometrijski niz

Već smo vidjeli i dosta geometrijskih nizova, kao što su

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots,$$

tj. nizova kod kojih je međusobni odnos susjednih članova konstantan! Formalnije,

Definicija 1.3. Ako je
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$
gdje je q realan broj, onda se $(a_n)_1^\infty$naziva *geometrijski niz.*

Naziv niza dolazi iz osobine da je $a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$, dakle svaki član niza a_{n+1} je geometrijska sredina člana a_n, koji mu neposredno prethodi i člana a_{n+2}, koji ga slijedi u nizu. Dakle
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ldots = q.$$
Odatle imamo da je
$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3, \end{aligned}$$
pa odatle dobijamo formulu za opći član geometrijskog niza
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$
No ako posmatramo obratno, tj.
$$a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow q = \frac{a_3}{a_2},$$
dobijamo
$$a_2 = a_1 \cdot \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3},$$
tj. a_2 je geometrijska sredina svojih susjednih članova! U općem slučaju
$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$
Sada nas, kao i kod aritmetičkog niza zanima zbir prvih n članova, tj. S_n.
$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} / \cdot (1-q)$$
$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q + a_1 q - a_1 q^2 + a_1 q^2 - a_1 q^3 + \ldots$$
$$+ a_1 q^{n-3} - a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-2} - a_1 q^{n-1} + a_1 q^{n-1} - a_1 q^n.$$
$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n = a_1(1-q^n)$$
odakle dobijamo da je suma prvih n članova
$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}!$$

Primjer. Posmatrajno geometrijski red $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ dakle $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Posmatrajmo zbir prvih 10 članova

$$S_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}$$

Ova suma je jednaka

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} == \frac{1}{2} \frac{\frac{2^{10}-1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1024 - 1}{1024} = 0,9990234375$$

Primjer (Kamata na kamatu).

- Na početku godine uložimo iznos novca I_0 u banku.
- Nakon određenog perioda obračunava se kamata od $p\%$ na iznos po principu kamata na kamatu.
- Na kraju prvog obračunskog perioda imamo

$$I_0 + I_0 \cdot p\% = I_0 + I_0 \cdot \frac{p}{100} = I_0(1 + \frac{p}{100}) = I_0 \cdot k.$$

- Na kraju drugog obračunskog perioda osnovica je $I_0 \cdot k$, tj.

$$I_0 \cdot k + (I_0 \cdot k) \cdot \frac{p}{100} = I_0 \cdot k(1 + \frac{p}{100}) = I_0 \cdot k^2.$$

- Ako stanja nakon svakog obračunskog perioda posmatramo kao niz, dobijamo geometrijski niz!

Primjer. Ako u banku uložimo $1000KM$ i obračunava nam se kamata na kamatu po stopi od 5%, koje će biti stanje na kraju dvadesetog obračunskog perioda?

Dakle I_0 iznosi $1000KM$. Šta u stvari mi trebamo izračunati?

Pa samo n-ti član geometrijskog niza! Dakle,

$$I_n = k^n \cdot I_0 = (1 + \frac{p}{100})^n \cdot I_0 = (1 + \frac{5}{100})^{20} \cdot 1000KM$$

Dakle poslije 20-tog obračunskog perioda, u banci će biti

$$I_{20} = 1,05^{20} \cdot 1000KM = 2653,30KM$$

1.2 Konvergencija nizova

Konvergencija nizova

U matematičkoj analizi proučava se ponašanje članova niza kada njihov indeks neograničeno raste, tj. kada indeks "teži u beskonačnost".

Ideja je da se proučava "gomilanje" članova niza oko neke konkretne vrijednosti. Tako na primjer, članovi nizova $(\frac{1}{n})$ i $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ "gomilaju se" oko nule, tj. sve su bliže nuli kako indeks n postaje veći, što vidimo ako izračunamo po nekoliko članova ovih nizova,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \qquad -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots .$$

Za članove niza čiji je opšti član dat sa $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ ne bismo mogli tvrditi da su sve bliže nuli kada se n povećava jer je na primjer

$$0 < x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} < \frac{3}{2n} = x_{2n} ,$$

iz čega vidimo da je x_{2n} na većoj udaljenosti od nule nego njemu prethodeći član.

Medjutim, i ovde se može uočiti neko gomilanje oko nule, što se vidi ako se izračuna nekoliko prvih članova niza, $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots$.

Definicija 1.4. Kažemo da je realan broj a granična vrijednost ili limes niza (x_n) ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj n_0, takav da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$ vrijedi $|x_n - a| < \varepsilon$, što jednostavnije zapisujemo matematičkom simbolikom sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) . \tag{1}$$

Gornju činjenicu zapisujemo sa

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ ili } x_n \to a \; (n \to +\infty) .$$

Ako je $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, kažemo da niz (x_n) konvergira ka a ili da teži ka a, kada n teži u beskonačnost. Ako postoji $a \in \mathbb{R}$, takav da $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, kažemo da je niz konvergentan.

Primjer. U primjeru ispred Definicije 1.4 smo pokazali da je $\lim_{n\to+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$. Na sličan način se pokazuje da je $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ili $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Pokažimo prvu relaciju.

$$\boxed{\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}}$$

Primjer. Neka je $x_n = 2^{\frac{1}{n}}$. Posmatramo li nekoliko prvih članova ovog niza

$$x_1 = 2^1 = 2 , \; x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = 1,41... , \; x_3 = 2^{\frac{1}{3}} = 1,26... ,$$

$$x_4 = 2^{\frac{1}{4}} = 1,19... , \; ... , x_{10} = 2^{\frac{1}{10}} = 1,07... ,$$

vidimo da se vrijednosti umanjuju i da se "kreću" ka 1, tj. "osjećamo" da je $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Ali ovakvo razmišljanje ni u kom slučaju ne predstavlja dokaz ove tvrdnje.

Na isti način se pokazuje sljedeći važan limes

$$\boxed{\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \ , \ \ (a > 0)}}$$

Primjer. Niz čiji je opšti član $x_n = (-1)^n$ nije konvergentan. Zaista, pretpostavimo suprotno, tj. da je za neko $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Kako su svi članovi datog niza jednaki ili 1 ili -1, to znači da se oba ta broja moraju nalaziti u proizvoljnoj ε-okolini tačke a. Medjutim, to očigledno nije moguće, npr. izaberemo li $\varepsilon < \frac{1}{2}$ tada nije moguće da oba broja i 1 i -1 budu u intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ čija je dužina manja od 1.

1.2.1 Osobine konvergentnih nizova

Teorem 1.1. *Ako niz ima graničnu vrijednost onda je ona jedinstvena.*

Definicija 1.5. Za niz (x_n) kažemo da je ograničen odozgo ako vrijedi:

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \le M\ .$$

Niz je ograničen odozdo ako vrijedi:

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \ge m\ .$$

Definicija 1.6. Za niz (x_n) kažemo da je ograničen ako je skup svih elemenata tog niza ograničen, tj. ako postoji realan broj $M \ge 0$ takav da je $|x_n| \le M$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovo zapisujemo sa

$$(\exists M \ge 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ |x_n| \le M\ .$$

Teorem 1.2. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Teorem 1.3. *Neka su dati nizovi (x_n) i (y_n).*

1. *Ako je $x_n = c \in \mathbb{R}$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$.*
2. *Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) i neka su a, b i c proizvoljni realni brojevi. Tada važi:*
   - *(a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} (ax_n + by_n) = ax + by$.
   - *(b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + c) = x + c$.
   - *(c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.
   - *(d)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$*, ako je* $y \ne 0$ *i* $y_n \ne 0$ *za* $n \in \mathbb{N}$.

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}+2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)$.

Koristeći pravilo $2.(a)$ i ranije pokazani limes niza ($\sqrt[n]{a}$) imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3\cdot 2^{\frac{1}{n}}+2\cdot 3^{\frac{1}{n}}\right)=3\cdot 1+2\cdot 1=5\ .$$

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+6\right)$.

Koristeći pravilo $2.(b)$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+6\right)=0+6=6\ .$$

Definicija 1.7. Niz (x_n) za koga važi $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$, nazivamo nula-niz.

Zapravo, ispitivanje proizvoljnog konvergentnog niza se može svesti na ispitivanje nula-niza, naime važi

Teorem 1.4. *Niz (x_n) konvergira ka $a\in\mathbb{R}$ ako i samo ako niz (x_n-a) konvergira ka 0.*

Teorem 1.5. *Zbir, razlika i proizvod dva nula-niza je ponovo nula-niz.*

Teorem 1.6. *Neka je (x_n) proizvoljan nula-niz i neka je (y_n) proizvoljan ograničen niz (ne obavezno konvergentan). Tada je niz (z_n), gdje je $z_n=x_n\cdot y_n$ ($n\in\mathbb{N}$), nula-niz.*

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n}$.

Označimo sa $z_n=\frac{\cos n}{n}=\frac{1}{n}\cos n$. Kako je niz $x_n=\frac{1}{n}$ nula-niz, a niz $y_n=\cos n$ je ograničen ($\cos x\leq 1$), to je na osnovu gornje teoreme niz (z_n) nula-niz, tj.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n}=0\ .$$

Veza limesa i relacija poretka

Teorem 1.7. *Neka je (x_n) proizvoljan niz.*

1. *Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x>p$ ($<p$), tada je $x_n>p$ ($<p$) za skoro svako $n\in\mathbb{N}$.*
2. *Ako je niz (x_n) konveregentan i ako je $x_n>p$ ($<p$), za skoro svako $n\in\mathbb{N}$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\geq p$ ($\leq p$).*

Dokaz

1. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $a > p$. Stavimo li da je $\varepsilon = \frac{a-p}{2}$, svi brojevi koji pripadaju intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ su veći od p ali skoro svi članovi niza (x_n) su u toj ε-okolini i time je tvrdjenje dokazano. Slučaj kada je $a < p$ dokazuje se analogno.

2. Neka je $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ i neka je $x_n > p$ za skoro svako n. Ako bi bilo $a < p$, to bi na osnovu dokazanog pod 1) značilo da je $x_n < p$ za skoro svako n, što je očigledna kontradikcija. Dakle mora biti $a \geq p$. ∎

Posljedica 1.1. *Ako svi članovi niza (x_n) pripadaju segmentu $[a, b]$, tada i* $\lim_{n\to+\infty} x_n \in [a, b]$.

1.2.2 Beskonačne granične vrijednosti

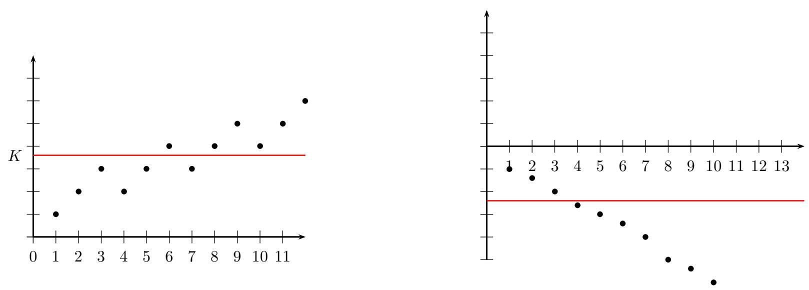
Definicija 1.8. Kažemo da niz (x_n) divergira ka plus beskonačnosti, što označavamo sa $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, ako vrijedi

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n > K \; .$$

Kažemo da niz (x_n) divergira ka minus beskonačnosti, što označavamo sa $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, ako vrijedi

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) x_n < -K \; .$$

U oba slučaja kažemo da niz odre\dj eno divergira.



Slika 3: Odre\dj eno divergentni nizovi.

Sada možemo izvršiti selekciju svih nizova u odnosu na konvergenciju. Svaki realni niz spada u jednu od klasa:

- Niz je konvergentan (granična vrijednost mu je neki realan broj).

- Niz je odredjeno divergentan (granična vrijednost mu je ili $+\infty$ ili $-\infty$).
- Niz je neodredjeno divergentan (nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrijednost).

Primjer. Posmatrajmo geometrijski niz $x_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Za koje $q \in \mathbb{R}$ je dati niz konvergentan?

Teorem 1.8. *Neka je* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *i neka je* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. *Tada vrijedi:*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = sgnx \cdot \infty$ *(*$x \neq 0$*).*
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.
4. *Ako je* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ *i ako su skoro svi članovi niza* (x_n) *pozitivni, tada je* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

Postoje kombinacije dva niza kada se rezultat ne može direktno odrediti kao u slučajevima opisanim u ovim teoremama. Tada kažemo da je granična vrijednost neodredjena ili da je neodredjenog tipa. To medjutim ne znači da granična vrijednost ne postoji, već samo da se ne može unaprijed odrediti primjenom pravila datih u ovim teoremama.

Primjer. Za niz sa opštim članom $x_n = \dfrac{n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 5n + 4}$ imamo neodredjenost tipa $\frac{\infty}{\infty}$

Postoji sedam tipova neodredjenosti i oni su:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 0 \cdot \infty\ ,\ \infty - \infty\ ,\ 1^\infty\ ,\ \infty^0\ ,\ 0^0\ .}$$

1.2.3 Monotoni nizovi

Definicija 1.9. Za niz (x_n) kažemo da je

- strogo monotono rastući ako vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} > x_n$.
- monotono rastući (neopadajući) ako vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} \geq x_n$.
- strogo monotono opadajući ako vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} < x_n$.
- monotono opadajući (nerastući) ako vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_{n+1} \leq x_n$.

Za niz koji posjeduje bilo koju od navedenih osobina kažemo da je monoton niz.

Kriteriji konvergencije mon. nizova

Teorem 1.9. *Svaki monoton niz je ili konvergentan ili odredjeno divergentan (ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrijednost).*

Teorem 1.10. *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.*

U ovoj teoremi treba razlikovati dva slučaja:

1. Ako je niz monotono rastući, zahtijevamo ograničenost odozgo.
2. Ako je niz monotono opadajući, zahtijevamo da je niz ograničen odozdo.

Primjer. Pokažimo da je niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo.

Jednostavnim računom se ima

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ .$$

Na osnovu Bernoullijeve nejednakosti je

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2} \ , \ n \geq 2 \ ,$$

pa imamo

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1 \ .$$

Dakle niz je strogo monotono rastući.

Ako sada posmatramo i niz $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, očigledna je nejednakost $x_n \leq y_n$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Pokazati da je niz (y_n) strogo monotono opadajući, ostavljeno je za vježbu. Iz ovoga onda zaključujemo da je bilo koji član niza (y_n) gornje ograničenje niza (x_n), pa možemo reći da je $x_n \leq y_1 = 4$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Iz monotonosti i ograničenosti niza (x_n) zaključujemo njegovu konvergenciju.

Graničnoj vrijednosti ovog niza dajemo posebno ime (prema Euleru), a ističemo i njegovu važnost za računanje mnogih drugih limesa.

Definicija 1.10.

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ .}$$

Broj e nazivamo Eulerovim brojem i on je jedna od najvažnijih matematičkih konstanti. Prvih nekoliko decimala tog broja su

$$e = 2,718281828...$$

Koristeći se algebrom limesa, lako se vidi da također imamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad (\text{ako } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty)$$

te direktno slijedi da

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e \quad (\text{ako } \lim_{n\to\infty} a_n = 0)$$

Primjer. Izračunati

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n-1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$;

Alati za izračunavanje limesa

Teorem 1.11 (Teorem o lopovu i dva policajca). *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi za koje vrijedi*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A.$
2. *Za skoro svako $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \le z_n \le y_n$.*

Tada i niz (z_n) ima graničnu vrijednost i važi $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = A.$

Primjer. Izračunati: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$.

Kako važi

$$3^n \le 2^n + 3^n \le 2\cdot 3^n\ ,$$

tada je

$$3 \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le 3\sqrt[n]{2}\ .$$

Ako označimo sa $x_n = 3$ i sa $y_n = 3\sqrt[n]{2}$, tada očigledno važi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 3\ ,$$

pa na osnovu teoreme o lopovu i dva policajca vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} = 3\ .$$