1.1 Matrice

1.1.1 Uvod u matrice i vektore

Pretpostavite da ste odgovorni za iznajmljivanje automobila zaposlenicima svoje firme.

Sedmični najmovi za različite veličine automobila su: kompaktni 139KM, srednji 160KM, veliki 205KM, minivan 340KM i luksuzna limuzina 430KM.

Za slijedeću sedmicu znate da će vam potrebe po veličinama biti: 4 kompaktna, 3 srednja, 12 velikih, 2 minivana i 1 luksuzna limuzina. Kako biste izračunali ukupnu cijenu iznajmljivanja automobila?

Ako biste izačunali

$$4 \cdot 139KM + 3 \cdot 160KM + 12 \cdot 205KM + 2 \cdot 340KM + 1 \cdot 430KM = 4606KM$$

bili biste u pravu. No upravo ste uradili problem množenja matrica a da niste toga bili svjesni!

Potrebno auta	Sedmica 1	Sedmica 2	Sedmica 3
Kompakt	4	7	2
Srednji	3	5	5
Veliki	12	9	5
Minivan	2	1	3
Limuzina	1	1	2

Ukupna cijena iznajmljivanja za svaku sedmicu bi se izračunala tako što pomnožimo ove količine sa odgovarajućim cijenama.

Definicija matrice

- *Matrica* se definiše kao niz brojeva (ili algebarskih simbola) smještenih u redove i kolone.
- Stoga potrebe iznajmljivanja automobila za tri sedmice se može napisati kao matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 12 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Svaki red odgovara veličini auta, a svaka kolona odgovara sedmici koju posmatramo.
- Uobičajeno je da se matrice označavaju velikim slovima, npr. A, B, C, M, N i sl. a da su članovi matrice uokvireni zagradama $(\cdot)$ ili $[\cdot]$.

- Svaki član matrice se zove *element* matrice. Elementi matrice moraju formirati kompletan pravougaonik, bez praznih mjesta.
- U gornjem primjeru imamo 5 redova i 3 kolone. Veličina matrice se naziva *red matrice*.
- Ako matrica ima m redova i n kolona, kažemo da je matrica reda $m \times n$.
- Matrica A je reda 5×3.

Definicija vektora

Matrice sa samo jednom kolonom ili samo jednim redom se nazivaju *vektori*.

Na primjer, skup cijena iznajmljivanja automobila sa početka je vektor reda 1×5

$$(139\ 160\ 205\ 340\ 430),$$

dok su potrebe iznajmljivanja za prvu sedmicu 5×1 vektor:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Operacije na matricama

Sabiranje i oduzimanje matrica

Matrice koje *imaju isti red* se mogu oduzimati i sabirati.

Sabiranje, odnosno, oduzimanje se radi na odgovarajućim elementima.

Primjer. Trgovac prodaje dva proizvoda, Q i R i ima dvije prodavnice, A i B.

Broj proizvoda koji su prodani u zadnje 4 sedmice su pokazane u matricama A i B ispod, gdje kolone predstavljaju sedmice a redovi odgovaraju proizvodima Q i R respektivno.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 12 & 7 \\ 10 & 12 & 9 & 14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 18 & 21 & 5 \end{pmatrix}$$

Kako prikazati ukupnu prodaju proizvoda po sedmicama u obje prodavnice? Jednostavno, saberemo matrice!

$$T = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 12 & 7 \\ 10 & 12 & 9 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 18 & 21 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5+8 & 4+9 & 12+3 & 7+4 \\ 10+8 & 12+18 & 9+21 & 14+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 13 & 15 & 11 \\ 18 & 30 & 30 & 19 \end{pmatrix}.$$

Oduzimanje matrica

Primjer. Ako je $A = \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$, a $B = \begin{pmatrix} 7 & 35 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, koliko je $A - B$?

$$A - B = \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 35 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12-7 & 30-35 \\ 8-4 & 15-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Množenje skalarom

- Postoje dvije vrste množenja koja se mogu izvršiti nad matricama. Matricu možemo pomnožiti specifičnom vrijednošću, kao što je broj (množenje skalarom) ili drugom matricom (matrično množenje).
- Skalarno množenje je vrlo jednostavno i predstavlja množenje svakog elementa matrice datim skalarom! Matrično množenje je dosta komplikovanije, ali o tome malo poslije.
- Data je matrica dva prodana proizvoda za dvije sedmice $A = \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$, gdje redovi predstavljaju proizvode, a kolone sedmice. Ako svaki proizvod košta 4KM, izračunajte pazar po proizvodima po sedmicama.

$$P = 4A = 4 \begin{pmatrix} 12 & 30 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 120 \\ 32 & 60 \end{pmatrix}$$

Dijeljenje skalarom radi na apsolutno isti način (sve dok taj skalar nije nula!)

Primjer. Ako skup cijena iznajmljivanja automobila $p = (139\ 160\ 205\ 340\ 430)$ uključuje PDV od 17%, a vaša kompanija može dobiti povrat poreza, dajte vektor v cijena bez poreza.

$$v = \frac{1}{1,17} p = \begin{pmatrix} 118,80 & 136,75 & 175,21 & 290,60 & 367,52 \end{pmatrix}.$$

Množenje matrica

- Ako množimo jednu matricu s drugom matricom, osnovno pravilo je da množimo elemente duž redova prve matrice sa odgovarajućim elementima niz kolonu druge matrice.
- Najjednostavniji način da se ovo razumije je da prvo pogledamo nekoliko primjera sa vektorima.
- Vratimo se našem primjeru s početka i posmatrajmo vektore:

$$p = (139\ 160\ 205\ 340\ 430), \quad q = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dakle kao što smo uradili na početku, prvi element redovnog vektora množimo sa prvim elementom kolonskog vektora, te to saberemo sa proizvodom drugog elementa sa drugim, itd.
- $$139 \cdot 4 + 160 \cdot 3 + 205 \cdot 12 + 340 \cdot 2 + 430 \cdot 1 = 4606.$$
- Posmatrajmo sada slučaj kada trebamo izračunati sve cijene po sedmicama, tj.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 12 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Kako bismo izračunali sve cijene po sedmicama, trebamo naći vektor

$$t = p \cdot A = (139\ 160\ 205\ 340\ 430) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 12 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rezultat je
$$t = (4606\ 4388\ 3983).$$
- Ako prva matrica pri množenju ima više od jednog reda, onda se postupak ponavlja dok ne iskoristimo sve redove.

Primjer. Pomnožimo matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 7 + 7 \cdot 4 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \\ 8 \cdot 7 + 1 \cdot 4 & 8 \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 8 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 76 & 15 \\ 60 & 48 & 17 \end{pmatrix}$$

- Sad se možete zapitati šta se dogodi kada pokušamo pomnožiti matrice gdje se broj elemenata duž redova prve matrice ne poklapa sa brojem elemenata duž kolona druge matrice.
- Odgovor je da se tada te matrice *ne mogu* množiti!
- Dakle, ako matrica A ima red $m \times n$, a druga matrica B ima red $r \times s$, množenje tih matrica je moguće ako i samo ako je $n = r$ i tada matrica AB ima red $m \times s$.

Množenje matrica - opšti slučaj

Opću $m \times n$ matricu možemo napisati kao

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

U ovom opštem slučaju kada množimo dvije matrice, A reda $m \times n$ i B reda $n \times r$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix} = C$$

Ovdje su elementi matrice C dati sa

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} \\ \vdots & \ \vdots \ \vdots \\ c_{mr} &= a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \ldots + a_{mn}b_{nr} \end{aligned}$$

Primjer. Nađite proizvod matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 6 & 0 & 20 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0,5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 & 2,5 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Primjer. Nađite proizvod matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Jedinična matrica

- Zadnja matrica AB predstavlja primjer specifične matrice. Matrica sa jednicama na svojoj *principalnoj dijagonali* i nulama svugdje drugo se zove *jedinična matrica*. Označava se sa I. Jedinična matrica mora uvijek biti *kvadratna*, tj. reda $n \times n$.
- Bilo koja matrica reda $m \times n$ pomnožena sa jediničnom matricom reda $n \times n$ ostaje nepromjenjena, tj.
$$A \cdot I = A.$$
- Matrica koja na svim elementima ima nulu se zove *nula matrica*.

Problem dijeljenja

- Problemu ‘dijeljenja’ matrica se pristupa preko derivacije *inverzne matrice*.
- Jedna od motivacija za traženje inverzne matrice je rješavanje sistema jednačina. Npr.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 &= 96 \\ 20x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 0.5x_4 &= 69 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 75 \\ x_1 + 12x_2 + x_3 + 8x_4 &= 134 \end{aligned}$$

- Rješenje gornjeg sistema je

$$x_1 = \frac{3005}{741}, x2 = \frac{7405}{741}, x3 = \frac{35}{19}, x4 = \frac{758}{741},$$

no to za sada nije najvažnije.

- Ove jednačine možemo da predstavimo u matričnoj formi $Ax = b$, naime

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 2 \\ 20 & -2 & 4 & 0.5 \\ 11 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 12 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 69 \\ 75 \\ 134 \end{pmatrix} = b$$

- Kako riješiti ovaj sistem jednačina koristeći se gornjim matričnim oblikom?
- Sjetite se jedinične matrice - ukoliko bismo na neki način mogli pomnožiti obje strane jednačine odgovarajućom matricom B tako da sa lijeve strane jednakosti dobijemo $BA = I$, tada bi na desnoj strani jednakosti dobili rješenje sistema jednačina Bb!
- No nalaženje te matrice B nije trivijalna stvar.
- *Inverzna matrica* je pojam koji nam je neophodan kako bismo rješili gornji problem.

Predznanja za inverzne matrice

Kako bismo pronašli inverznu matricu, moramo posmatrati slijedeće koncepte u matričnoj teoriji:

- Determinate;
- Minori;
- Kofaktori;
- Adjungirana matrica.

1.2 Determinante

1.2.1 Definicija determinante

Determinante

Svakoj kvadratnoj matrici A možemo pripisati jedinstven broj koji se naziva *determinanta* matrice – $\det A$

Determinanta (kvadratne) matrice 1×1 je sam jedini element matrice!

Determinanta (kvadratne) matrice 2×2 je broj koji dobijemo kada pomnožimo elemente na suprotnim ćoškovima i oduzmemo ih, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Primjer. Naći determinantu matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 7 \cdot 4 = 45 - 28 = 17.$$

Sarusovo pravilo

Sarusovo pravilo je jednostavan način za izračunati determinantu trećeg reda.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Primjer. Izračunati determinantu pomoću Sarusovog pravila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8$$

$$-3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 10 = -3.$$

Pojam minora

Definicija 1.1. *Minor* M_{ij} elementa a_{ij} matrice A je subdeterminanta koja se dobije iz $\det A$ brisanjem i-te vrste i j-te kolone.

Primjer.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Pojam kofaktora

Definicija 1.2. Kofaktor ili algebarski komplement A_{ij} elementa a_{ij} matrice A

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Primjer.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 4,\ A_{13} = (-1)^{1+3} M_{23} = -2$$

Laplaceov teorem

Teorem 1.1. *Laplaceov teorem nam daje način računanja determinante proizvoljne kvadratne matrice, po formuli*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Očito imamo dva načina za račun, no oba daju isti rezultat. Prvo se zove razvoj po i-toj vrsti, a drugo razvoj po j-toj koloni. Drukčije rečeno, imamo:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$$

Primjedba. Laplaceov razvoj je najbolje raditi po onom redu (ili koloni) u kojoj ima najviše nula!

Moguće je, ne mijenjajući vrijednost determinante postići da u nekom redu (koloni) imamo što veći broj nula. To se postiže korištenjem osobina determinanti, no o tomu malo poslije.

Determinanta matrice trećeg reda

Za opću matricu trećeg reda, determinanta se može, na primjer, izračunati po formuli:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{31}.$$

Primjedba. Iako smo determinantu matrice 3×3 našli posmatrajući duž prvog reda, mogli smo to uraditi duž bilo kojeg drugog reda ili kolone.

No u tom slučaju treba obratiti pažnju!

Primjer. Naći determinantu matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 9 & 0 & 4 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$9 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \cdot (6 \cdot 2 - 1 \cdot 5) + 4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot 2) = 9 \cdot 7 + 4 \cdot 8 = 95.$$

Prije nego sto pređemo na osobine determinanti, treba nam jedan koncept u matricama koji do sada nismo koristili, a to je pojam *transponovane matrice*.

Definicija 1.3. Neka je data proizvoljna pravougaona matrica A reda $m \times n$. Njena transponovana matrica A^T je matrica reda $n \times m$ koja se dobie iz matrice A obrtanjem pojmova redova i kolona, tj. ako je $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots m, j = 1, \dots n$,

$$A^T = (a_{ji}), j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m.$$

Primjer.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0,5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 & 2,5 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 0,5 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 2 \\ 7 & 2,5 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Osobine determinanti

Osobine determinanti

P1 $\det A^T = \det A$

Primjer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

P2 Zamjenom dvaju redova (ili kolona)unutar determinante mijenja se znak determinante, no ne i numerička vrijednost.

Primjer.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

P3 Determinantu množimo nekim brojem tako da joj sve elemente jednog reda (ili kolone) pomnožimo tim brojem. Drukčije, zajednički faktor nekog reda (ili kolone) se može izvući ispred determinante.

Primjer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

P4 Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi jednog reda (ili kolone) jednaki nuli.

P5 Determinanta je jednaka nuli ako su elementi jednog reda (ili kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima nekog drugog reda (odnosno kolone)

Primjer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

P6 Vrijednost determinante se neće promijeniti ako elementima jednog reda (ili kolone) dodamo odgovarajuće elemente nekog drugog reda (kolone) pomnožene jednim istim brojem.

Primjer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

P7 $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Primjer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

P8 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Primjer.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1.3 Inverzna matrica

1.3.1 Izračunavanje inverzne matrice

Inverzna matrica

Definicija 1.4. Neka je A kvadratna matrica $n \times n$. Ako postoji kvadratna matrica $X_{n\times n}$ takva da je

$$AX = XA = I,$$

tada se ona naziva inverznom matricom matrice A. Obično se označava sa A^{-1}.

Dakle imamo da je

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Osobine inverznih matrica

1. Nema svaka matrica svoju inverznu matricu. Prije svega, mora biti kvadratna matrica. Ako kvadratna matrica *ima* inverznu matricu, onda se ona naziva *regularnom*, a inače se zove *singularnom*.

2. Ako postoji A^{-1}, onda je i A inverzna matrica matrice A^{-1}, tj.

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

3. Ako inverzna matrica postoji, ona je jedinstvena.
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Dokaz.)
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (Primjer.)

Dokaz

Neka su matrice $A, B, A \cdot B$ i $B \cdot A$ inverzibilne.

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = I \iff A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1}$$
$$I \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \iff B^{-1}B \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$I \cdot (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \qquad \blacksquare$$

Uslovi za postojanje inverzne matrice

- Inverznu matricu A^{-1} možemo samo pronaći za kvadratnu matricu A.
- U nekim slučajevima matrica A^{-1} neće postojati!

  Ako matrica ima inverznu matricu, ona se naziva *regularnom*. Inače naziva se *singularnom*.
- Matrica A je *inverzibilna* ako i samo ako postoji matrica A^{-1} za koju vrijedi $AA^{-1} = I$.
- Nula matrica nije inverzibilna.
- Linearna zavisnost dva ili više redova (ili kolona) unutar matrice također onemogućava inverziju.

Teorem 1.2. *Matrica A je singularna ako i samo ako je $\det A = 0$, tj. matrica A je regularna ako i samo ako $\det A \neq 0$.*

Dokaz. $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$.

Odavdje slijedi da je $\det A \neq 0$! $\blacksquare$

Dakle, kriterij regularnosti matrice A je da imamo

$$\det A \neq 0.$$

Kofaktorska matrica

Definicija 1.5. Kofaktorska matrica matrice A je matrica koja sadrži kofaktore elemenata matrice A na odgovarajućim mjestima

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Adjungirana matrica

Adjungirana matrica

Definicija 1.6. Adjungirana matrica matrice A je matrica definisana sa $\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{cof}(A))^T$, tj.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Inverzna matrica - KONAČNO!

Teorem 1.3. *Neka je kvadratna matrica A regularna. Tada postoji njena inverzna matrica A^{-1} i imamo da je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A).$$

Primjer. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Primjer. $\det A = 10 \neq 0$, stoga postoji inverzna matrica! Nađimo sada sve minore:

$$M_{11} = 4, M_{12} = 2, M_{21} = -3, M_{22} = 1.$$

Stoga su kofaktorska matrica i adjungirana matrica:

$$cof(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konačno

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Algoritam izračunavanja inverzne matrice

1. IZRAČUNAJTE DETERMINANTU $\det A$!!! Ako je $\det A \neq 0$, onda zaključimo regularnost i inverzna matrica postoji.
2. Izračunajte sve minore matrice A.
3. Izračunajte sve kofaktore matrice A i napišite cof(A).
4. Izračunajte adj$(A) = [\text{cof}(A)]^T$.
5. Podijelite adj(A) sa determinantom!!!
6. Dobivena matrica je A^{-1}. PROVJERITE REZULTAT!!

Primjer. Naći inverznu matricu matric $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. $\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0! \Rightarrow \exists A^{-1}$
2. $M_{11} = -3,\ M_{12} = -2,\ M_{13} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

   $M_{21} = 8,\ M_{22} = -4,\ M_{23} = 5,\ M_{31} = -6,\ M_{32} = 3,\ M_{33} = -2.$
3. $A_{11} = -3,\ A_{12} = 2, A_{13} = -1, A_{21} = -8,\ A_{22} = -4, A_{23} = -5,\ A_{31} = -6,\ A_{32} = -3,\ A_{33} = -2.$

4. cof $(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -8 & -4 & -5 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$,

   adj $(A) = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -6 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.
5. $A^{-1} = \dfrac{1}{det(a)}$adj $(A) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.
6. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Primjena u rješavanju matričnih jednačina

Matrična jednačina je jednačina u kojoj su nepoznate i koeficijenti matrice.

Primjer. $A \cdot X = B$. Tada ovo rješavamo tako što pomnožimo cijelu jednakost *s lijeve strane* sa A^{-1}.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

dakle $X = A^{-1} \cdot B$.

Primjer. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Riješiti $X \cdot A = B$. Ako matričnu jednačinu pomnožimo sa A^{-1} sa desne strane, dobijemo $X = B \cdot A^{-1}$, pod uslovom da postoji.

$\det A = 6 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Stoga je nepoznata matrica

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Linearna (ne)zavisnost matrica

Mi ćemo razmatrati samo linearnu (ne)zavisnost kolonskih i redovnih matrica (vektora).

- Za dvije matrice v_1, v_2 kažemo da su *linearno nezavisne* ukoliko

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

- Za porodicu matrica $v_1, v_2, \ldots, v_n$ kažemo da su *linearno nezavisne* ukoliko

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

- U suprotnom, kažemo da su *linearno zavisne*. Linearna zavisnost slijedi ako barem jedan od $\alpha_i \neq 0$.

Primjer. Provjerite linearnu (ne)zavisnost vektora v_1, v_2, v_3:

$$v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 3), v_3 = (2, 2, 3)$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha, 2\alpha, 0) + (\beta, 0, 3\beta) + (2\gamma, 2\gamma, 3\gamma) =$$
$$(\alpha + \beta + 2\gamma, 2\alpha + 2\gamma, 3\beta + 3\gamma).$$

Ovaj zbir je jednak nula matrici ako i samo ako je zadovoljen

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+2\gamma &= 0 \\ 2\alpha+2\gamma &= 0 \\ 3\beta+3\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Budući da je ovo kvadratni sistem, on će imati netrivijalnih rješenja ako i samo ako je determinanta sistem $D = 0$ (o tomu više brzo!).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Stoga možemo naći $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ tako da je $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Takvi su na primjer $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$.

Vjezba. Provjerite linearnu (ne)zavisnost vektora v_1, v_2, v_3 i vektora v_1, v_2, v_3, v_4:

$$v_1 = (0,0,1), v_2 = (0,2,-2), v_3 = (1,-2,1), v_4 = (4,2,3)$$

1.4 Rang matrice

Rang matrice

Koncept linearne zavisnosti vektora (tj. matrica) nam omogućava uvođenje jednog važnog pojma i osobine matrica, naime *rang matrice*. Važno je napomenuti da, za razliku od determinanti, rang matrice A možemo pronaći za *bilo koju* matricu A, tj. dimenzija $m \times n$.

Definicija 1.7. Ako je maksimalni broj linearno nezavisnih redova koji možemo naći u matrici A jednak broju r, tada taj broj nazivamo *rang matrice* A i označavamo ga sa $r(A)$.

Primjedba. Rang matrice $r(A)$ također u isto vrijeme označava maksimalni broj linearno nezavisnih kolona!

Primjedba. Rang matrice može biti maksimalno m ili n, tj.

$$r(A) \leq min(m, n).$$

Primjedba. Po definiciji, $n \times n$ regularna matrica ima n linearno nezavisnih redova (tj. kolona) pa ima rang $r(A) = n$.

S obzirom na vezu linearne zavisnosti i determinanti, rang matrice možemo drugačije definisati:

Definicija 1.8. Rang matrice $r(A)$ je maksimalni red determinante različite od nule koja se može formirati od redova i kolona te matrice!

Izračunavanje ranga matrice

Pri određivanju ranga matrice koristit ćemo tzv. *elementarne transformacije matrice*:

1. zamjena mjesta dva reda ili dvije kolone;
2. množenje reda ili kolone nekim brojem različitim od nule;
3. elementima jednog reda (kolone) možemo dodati odgovarajuće elemente drugog reda (kolone).

Primjenom ovih transformacija, dobit će se matrica koja ima isti rang kao i početna matrica (kažemo $A \equiv B$ ako $r(A) = r(B)$).

Ovaj postupak ide na način da svaki naredni red ima jednu nulu više od prethodnog, što se naziva i postupak *Gaussove eliminacije*. Ovaj postupak je sličan onome viđenom kod izračunavanja determinanti (svođenje kolone ili reda na što više nula). Rang ove dvije matrice će biti isti zato što će se vrijednost maksimalne determinante možda promjeniti, no nikada ne može postati jednaka nuli!

Po završenoj Gaussovoj eliminaciji, rang je u stvari broj redova (tj. kolona) koji imaju barem jedan element različit od nule!

Primjer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Oduzevši $2\times$ prvi red od drugog reda, $3\times$ prvi red od trećeg reda i $5\times$ prvi red od četvrtog reda, dobivamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & -7 & -7 & 15 \\ 0 & -10 & -13 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 & 15 \\ 0 & -10 & -13 & 24 \end{pmatrix}$$

Dodavši $7x$ drugi red trećem redu i $10x$ drugi red četvrtom redu, dobivamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Konačno, oduzimanjem trećeg reda od četvrtog reda, dobivamo

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ova matrica ima rang 3, jer se iz nje može napraviti 3×3 determinanta različita od nule, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7,$$

a ne i 4×4 determinanta različita od nule, pa je rang početne matrice 3!

Primjer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II-2I, IV-3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$