Diferencijalna Geometrija: Finalni dio ispita 03/03/2014

Zadatak 1.

(a) Pretpostavite da je $s \mapsto \gamma(s)$ dužinom luka parametrizirana kriva, $T = \gamma'$, sa $T'(s) \neq 0$ za sva s.

(i) Dajte definiciju *krivine* κ i *torzije* τ, kada je $N = \frac{T'}{|T'|}$.

(ii) Pokažite da krivina zadovoljava $\kappa^2 = |\gamma' \times \gamma''|^2$.

(b) Neka je $t \mapsto \gamma(t)$ regularna parametrizovana kriva i neka je $s \mapsto \tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ repara – metrizacija krive γ (ne obavezno dužinom luka). Pokažite da je, za sva s,

$$\frac{|\tilde{\gamma}' \times \tilde{\gamma}''|^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}(t)$$

(c) Zaključite iz gornjeg da je, za regularnu parametriziranu krivu $t \mapsto \gamma(t)$,

$$\kappa^2 = \frac{|\gamma' \times \gamma''|^2}{|\gamma'|^6}.$$

(d) Neka $F = (T, N, B)$ označava principalni okvir dužinom luka parametrizovane krive $s \mapsto \gamma(s)$ i neka su κ i τ krivina i torzija krive γ. Definišimo "Darboux-ovo vektorsko polje"

$$\delta := N \times N' = \tau\, T + \kappa\, B.$$

Pokazati da su Frenetove jednačine ekvivalentne jednačinama

$$T' = \delta \times T, \quad N' = \delta \times N, \quad B' = \delta \times B.$$

Zadatak 2.

(a) Objasnite kada je $t \mapsto N(t)$ *paralelno normalno vektorsko polje* duž regularne krive $t \mapsto \gamma(t)$. Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao.

(b) Dokažite da paralelna normalna polja duž krive imaju konstantnu dužinu i da, ako su N_1 i N_2 dva paralelna normalna polja duž γ, N_1 i N_2 čine konstantan ugao.

(c)

(i) Navedite *Rodriguesovu jednačinu*, rezultat koji karakterizuje pravce krivine.

(ii) Pokažite da je $t \mapsto \gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ linija krivine regularne parametrizovane površi $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $t \mapsto N(t) = \mathbf{n}(u(t), v(t))$ paralelno normalno polje duž γ.

(d) Neka su $(u, v) \mapsto \mathbf{x}_1(u, v), \mathbf{x}_2(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dvije regularne površi sa Gaussovim preslikavanjima $\mathbf{n}_1$ i $\mathbf{n}_2$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_1(u, 0) = x_2(u, 0)$, to jest, površi se sijeku duž krive $u \mapsto \gamma(u) := \mathbf{x}_i(u, 0)$. Pretpostavite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_1$ i da se obje površi sijeku pod konstantnm uglom α, $\cos\alpha \neq \pm 1$. Pokažite da je $u \mapsto \gamma(u)$ linija krivine za $\mathbf{x}_2$.

(e) Stoga, dajte geometrijski argument da su meridijani, $v = const$, površi revolucije $(u, v) \mapsto (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ linije krivine.

Zadatak 3.

(a) Weingartenov tenzor - definisati i pokazati postojanje. Iskoristiti kako bi uveli pojmove srednje krivine, Gaussove krivine i principalnih krivina povri.

(b) Kako bi površ bila izometrična ravni, potrebno je i dovoljno da je Gaussova krivina $K \equiv= 0$. Skicirati dokaz jasno navesti sve rezultate koji se koriste.

Zadatak 4. Gaussova teorema egregium - navesti, ukratko dokazati sa obaveznim navodjenjem iskorištenih rezultata.

Fundamentalna teorema teorije površi.